Fundamentos de Física I

Dr. Guillermo Sánchez Burillo

Escuela Universitaria de La Almunia

Contents

1 Cinemática **7**
- 1.1 Introducción . . . 7
- 1.2 Movimiento de una partícula . . . 7
- 1.3 Concepto de velocidad . . . 8
- 1.4 Concepto de aceleración . . . 9
- 1.5 De la posición a la aceleración, y viceversa . . . 10
- 1.6 Algunas relaciones útiles . . . 11
  - 1.6.1 Si conocemos $\vec{a}(\vec{r})$ . . . 11
  - 1.6.2 Si conocemos $a(v)$ . . . 11
  - 1.6.3 Si conocemos $v(r)$ . . . 12
- 1.7 Casos sencillos . . . 12
  - 1.7.1 Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) . . . 12
  - 1.7.2 Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA) . . . 12
- 1.8 Cinemática del Movimiento Vibratorio Armónico . . . 13
  - 1.8.1 Características del movimiento . . . 13
- 1.9 Movimiento en Coordenadas Polares . . . 14
- 1.10 Movimiento Circular: Descripción en polares . . . 18
- 1.11 Casos sencillos de Movimiento Circular . . . 18
  - 1.11.1 Movimiento circular uniforme . . . 18
  - 1.11.2 Movimiento circular uniformemente acelerado . . . 19

2 Dinámica **21**
- 2.1 Introducción . . . 21
- 2.2 Vectores y productos . . . 21
  - 2.2.1 Producto por un escalar . . . 21
  - 2.2.2 Producto escalar . . . 21
  - 2.2.3 Producto vectorial . . . 22
- 2.3 Las leyes de Newton . . . 22
- 2.4 Sistemas de referencia Inerciales y No Inerciales . . . 24
- 2.5 Dinámica de una partícula . . . 25
  - 2.5.1 Momento lineal . . . 26
  - 2.5.2 Momento angular . . . 26
  - 2.5.3 Momento de una fuerza . . . 27
  - 2.5.4 Impulso de una fuerza . . . 27
  - 2.5.5 Trabajo . . . 27
  - 2.5.6 Potencia . . . 28
  - 2.5.7 Energía cinética . . . 29
  - 2.5.8 Fuerzas Conservativas . . . 29

2.5.9 Energía Potencial 30
2.5.10 Energía Mecánica 31
2.6 Ejemplos de Fuerzas Conservativas 31
2.6.1 El caso Gravitatorio 31
2.6.2 Energía potencial gravitatoria 32
2.6.3 El caso elástico 33
2.7 Dinámica de Sistemas de Partículas 34
2.8 Colisiones entre partículas 36
2.8.1 Partículas indeformables y libres 36
2.8.2 Colisión no rígida 37
2.8.3 Colisión no aislada 37

3 Oscilaciones 39
3.1 Introducción 39
3.2 Cinemática de la oscilación armónica 39
3.3 Dinámica de la oscilación armónica 40
3.4 Péndulo simple 41
3.5 Oscilaciones amortiguadas 43
3.6 Oscilaciones forzadas y amortiguadas 44
3.6.1 Resonancia 47
3.7 Oscilaciones Anarmónicas 49
3.8 Superposición de armónicos 52
3.8.1 Superposición de armónicos de igual frecuencia 52
3.8.2 Superposición de armónicos de igual amplitud y fase, pero distinta ω 53

4 Sólido Rígido 55
4.1 Introducción 55
4.2 Rotación en torno a un eje fijo y momento de inercia 55
4.2.1 Convenio de sentido de rotación 55
4.2.2 Momento angular de un sólido rígido en rotación 56
4.2.3 Momento de Inercia 57
4.2.4 Momento de inercia de una varilla 58
4.2.5 Momento de inercia de un disco 59
4.2.6 Momento de inercia de un paralelepípedo 59
4.2.7 Teorema de Steiner 60
4.2.8 Ecuación del movimiento 60
4.3 Energía Cinética de rotación 61
4.4 Fuerzas de Ligadura 62
4.4.1 Caso I: Centro de masas no contenido en el eje de rotación 62
4.4.2 Caso II: El eje de rotación no es un eje principal de inercia 63
4.5 Ejemplos 64
4.5.1 El péndulo físico 64
4.5.2 Rodaduras sin deslizamiento 65
4.5.3 La máquina de Atwood 67

5 Termodinámica **69**
5.1 Introducción 69
5.2 Equilibrio térmico y temperatura 69
5.3 Leyes de los gases ideales 70
5.3.1 Ley de Boyle/Mariotte 70
5.3.2 Ley de Gay-Lussac/Charles 70
5.3.3 Avogadro y el mol 71
5.3.4 Ley de Avogadro 71
5.3.5 Ecuación de Estado 71
5.3.6 Ley de Dalton 71
5.4 Teoría cinética 72
5.4.1 Energía cinética 72
5.4.2 Presión 73
5.4.3 Energía Interna 74
5.5 Energía Interna, Calor y Trabajo: Primer Principio de la Termodinámica 75
5.5.1 Calor 75
5.5.2 Cambios de temperatura 75
5.5.3 Cambios de Fase 76
5.5.4 Trabajo 76
5.5.5 Primer Principio de la Termodinámica 77
5.5.6 Experimento de Joule 77
5.6 Procesos Termodinámicos 78
5.6.1 Procesos Isócoros 78
5.6.2 Procesos Isobaros 79
5.6.3 Procesos Isotermos 80
5.6.4 Procesos Adiabáticos 81
5.7 Máquinas Térmicas y Segundo Principio de la Termodinámica . . 83
5.7.1 Procesos espontáneos 83
5.7.2 Máquinas Térmicas 83
5.7.3 Rendimiento en máquinas térmicas 85
5.7.4 El ciclo de Carnot 85

Chapter 1

Cinemática

1.1 Introducción

La **cinemática** es la parte de la física que se encarga de la descripción del movimiento. Esta descripción se realiza sin indagar en las causas que lo provocan (eso sería la dinámica).

La primera pregunta es: ¿Qué necesitamos para poder describir el movimiento?

- Un sistema de referencia, desde el que el observador toma sus medidas. Dos observadores en distintos sistemas de referencias dan descripciones del movimiento diferentes.

Utilizamos dos conceptos fundamentales en cinemática: El tiempo y el espacio. Si tenemos, por ejemplo, un objeto viajando en el espacio, la descripción del movimiento es poder decir el cuándo y el dónde, o lo que es lo mismo, su posición como una función del tiempo. Para ello utilizamos patrones que nos permitan cuantificar estas magnitudes en unidades del Sistema Internacional (SI).

- Tiempo[1]: La unidad en SI es el segundo. El patrón se obtiene a partir de una determinada frecuencia atómica: 1 s $\leftrightarrow \nu_{\mathrm{Cs}} = 9192631779$ Hz

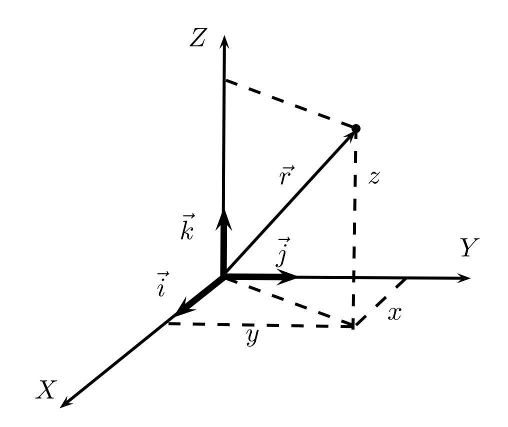
- Espacio (o distancia): La unidad en SI es el metro. El patrón se obtiene a partir de la velocidad de la luz en el vacío (c, que es constante) y el patrón de segundo: 1 m $\leftrightarrow c = 299792458$ m/s

Entonces, con una cinta métrica y un reloj sabemos el dónde y el cuándo $\rightarrow$ A partir de ahí podemos describir el movimiento desde un Sistema de Referencia dado.

1.2 Movimiento de una partícula

La posición de una partícula, que en general es una función del tiempo, la denotamos con el vector $\vec{r}(t)$. En un sistema de ejes cartesianos, podemos descomponer el vector posición en 3 dimensiones en las direcciones X, Y, Z.

[1] El tiempo es absoluto. En física clásica el tiempo transcurre igual para todos los observadores independientemente de su movimiento relativo



$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} & \text{si el movimiento es 3D} \\ (x(t), y(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} & \text{si el movimiento es 2D} \\ x(t) & \text{si el movimiento es 1D} \end{cases}$$

Observar que mientras $\vec{r}(t)$ es un vector, sus componentes $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son magnitudes escalares. Se relacionan con el vector $\vec{r}(t)$ mediante los vectores unitarios $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Estos vectores están definidos de modo que el producto escalar entre ellos es:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

además $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, y son invariantes. Conocida la posición de la partícula, podemos deducir la velocidad ($\vec{v}$) y aceleración ($\vec{a}$).

1.3 Concepto de velocidad

¿Cómo cambia la posición $\vec{r}$ con el tiempo? Si después de un intervalo de tiempo Δt la partícula pasa de estar en la posición $\vec{r}(t)$ a situarse en $\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t)+\Delta\vec{r}$, es decir, ha experimentado un avance $\Delta\vec{r}$, entonces su velocidad media ha sido de $\langle\vec{v}\rangle = \Delta\vec{r}/\Delta t$ (La notación $\langle\cdot\rangle$ quiere decir promedio de lo de dentro). Esta cantidad nos da información de cómo cambia la posición de la partícula en un intervalo de tiempo Δt. Pero aquí lo que nos interesa no es la velocidad media sino la instantánea, es decir, cómo cambia el vector $\vec{r}$ en cada instante de tiempo. Para ello tenemos que utilizar incrementos de tiempo infinitesimales; nos encontramos con lo que en matemáticas llamamos derivada:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$

El vector $\vec{v}(t)$ nos proporciona información sobre el movimiento inmediato:

- **Dirección** y **sentido** del movimiento: Hacia donde se desplaza la partícula. Lo indica un vector unitario $\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, con $|\vec{u}_v| = 1$.
- **Módulo** de la velocidad $|\vec{v}|$: Cómo de rápido es el desplazamiento.

Ojo! Tanto el módulo $|\vec{v}|$ como la orientación $\vec{u}_v$ cambian durante la trayectoria: En general dependen del tiempo t. Por lo tanto, $\vec{v}(t)$ nos dice cómo cambia la posición en cada instante de tiempo. Si conocemos $\vec{r}(t)$ podemos calcular la velocidad $\vec{v}(t)$.

Por 'conocer $\vec{r}(t)$' se quiere decir que se conocen (i) sus *componentes cartesianas* o bien (ii) su *módulo y orientación*

(i) Componentes Cartesianas:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \implies$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}} =$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

donde se ha tenido en cuenta que los vectores unitarios son fijos, y por lo tanto:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

(ii) Módulo y orientación:

$$\vec{r}(t) = r(t)\ \vec{u}_r(t)$$

Es decir, nuestra partícula está a una distancia del origen $r(t) = |\vec{r}(t)|$, en la dirección y sentido que indica el vector unitario $\vec{u}_r(t) = \frac{\vec{r}(t)}{r(t)}$.

Entonces la velocidad la calculamos derivando con respecto al tiempo:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r(t) + r(t)\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt}}$$

Ahora el vector unitario NO es constante, depende del tiempo y por lo tanto su derivada debe aparecer en la expresión de v.

1.4 Concepto de aceleración

¿Cómo cambia la velociad con el tiempo? $\rightarrow$ Es lo que la aceleración nos dice. Análogamente al caso de la velocidad (que es la derivada temporal de la posición), la aceleración la definimos como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}}$$

La aceleración nos informa de cómo está cambiando la velocidad: tanto cambios en su módulo $|\vec{v}(t)|$ (más rápido o más lento) como cambios en su dirección y sentido, es decir, en $\vec{u}_v(t)$.

En componentes cartesianas:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

1.5 De la posición a la aceleración, y viceversa

Ahora ya sabemos cómo, partiendo de una expresión general de la posición en función del tiempo $\vec{r}(t)$, podemos deducir tanto la velocidad como la aceleración en un instante de tiempo cualquiera, mediante derivación.

$$\vec{r}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{v}(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \vec{a}(t)$$

El proceso inverso es el de integración en el tiempo: así podemos, a partir de la aceleración obtener la velocidad, y a partir de ésta, la posición.

Si la función que conozco es la velocidad, entonces la posición se obtiene:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \implies d\vec{r}(t) = \vec{v}(t)dt$$

$$\int_{\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}' = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' \implies \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' \tag{1.1}$$

Observar que, a la hora de integrar, aparecen constantes de integración que matemáticamente son libres. Sin embargo, para obtener una expresión que físicamente tenga sentido, hemos de utilizar las condiciones iniciales del movimiento: en la ecuación en la que obtenemos $\vec{r}(t)$ integrando la velocidad, hemos puesto como límites inferiores de las respectivas integrales el tiempo t_0 y la posición en dicho instante de tiempo $\vec{r}(t = t_0)$ que denotamos como $\vec{r}_0$. En los límites superiores de integración ponemos la expresión a obtener $\vec{r}(t)$ y el tiempo t.

Si el dato que conozco es la aceleración, entonces la velocidad se calcula así:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t) \implies d\vec{v}(t) = \vec{a}(t)dt$$

$$\int_{\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}' = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' \implies \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' \tag{1.2}$$

Para establecer los límites de integración procedemos análogamente a como se hizo previamente. Para obtener la velocidad, integramos con límites inferiores el tiempo t_0 y la velocidad justo entonces $\vec{v}_0$, etc...

Para deducir la posición a partir de la aceleración hemos de integrar dos veces. O, dicho de otro modo, introducimos el resultado que acabamos de obtener para $\vec{v}(t)$ (ecuación (1.2)) en la ecuación (1.1), donde se saca la $\vec{r}(t)$:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' \\ \vec{v}(t') = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'')dt'' \end{array}\right\} \implies \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'')dt''\right] dt'$$

1.6 Algunas relaciones útiles

Hemos visto como a partir de una expresión de posición, velocidad, o aceleración en función del tiempo se pueden deducir las otras dos. Sin embargo en algunas ocasiones es posible que nos enfrentemos a problemas en los que, por ejemplo, la aceleración no nos es dada como función de t sino de la posición $\vec{r}$. En tales casos no se puede hacer directamente una integral en el tiempo, porque no tenemos una expresión que dependa explícitamente del tiempo sino que lo que tenemos es $\vec{a}(\vec{r})$ ¿cómo se obtiene la velocidad o la posición? Recurrimos a las definiciones de aceleración y velocidad que ya hemos visto:

1.6.1 Si conocemos $\vec{a}(\vec{r})$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a}\implies d\vec{v}=\vec{a}dt\\ \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\end{array}\right\}\vec{v}\cdot d\vec{v}=\vec{a}\cdot dt\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{a}\cdot d\vec{r}\implies$$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(\vec{r})}\vec{v}\cdot d\vec{v}=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{a}(\vec{r})d\vec{r}.$$

El término $\vec{v}\cdot d\vec{v}$ es un producto escalar entre dos vectores. Si las componentes de ambos son $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ y $d\vec{v}=(dv_x,dv_y,dv_z)$, entonces el producto escalar es:

$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=v_xdv_x+v_ydv_y+v_zdv_z$$

entonces su integral la calculamos como la suma de tres integrales separadas:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(\vec{r})}\vec{v}\cdot d\vec{v}=\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(\vec{r})}(v_xdv_x+v_ydv_Y+v_zdv_z)=\frac{1}{2}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(\vec{r})}=\frac{1}{2}\left(|\vec{v}(\vec{r})|^2-|\vec{v}_0|^2\right)$$

volviendo a la expresión anterior:

$$\frac{1}{2}\left(|\vec{v}(\vec{r})|^2-|\vec{v}_0|^2\right)=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{a}(\vec{r})d\vec{r}\implies$$

$$\boxed{|\vec{v}(\vec{r})|=\sqrt{v_0^2+2\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{a}(\vec{r})d\vec{r}}}$$

1.6.2 Si conocemos $a(v)$

Mediante separación de variables podemos calcular $v(t)$ a partir de la expresión de la aceleración como función de la velocidad.

$$a(v)=\frac{dv}{dt}\implies dt=\frac{dv}{a(v)}\implies\boxed{\int_{t_0}^{t}dt=\int_{v_o}^{v(t)}\frac{dv}{a(v)}}$$

de esta manera podemos despejar $v(t)$ y después mediante integración y derivación obtener, respectivamente $r(t)$ y $a(t)$.

1.6.3 Si conocemos $v(r)$

El procedimiento es muy similar al del caso anterior:

$$v(r) = \frac{dr}{dt} \implies dt = \frac{dr}{v(r)} \implies \boxed{\int_{t_0}^{t} dt = \int_{r_o}^{r(t)} \frac{dr}{v(r)}}$$

así, obtenemos $r(t)$ despejando. Derivando podemos conocer $v(t)$, y, volviendo a derivar, la aceleración $a(t)$.

1.7 Casos sencillos

Existen dos casos particulares de cinemática en los que todo se simplifica y podemos obtener algunas relaciones generales. Se trata del movimiento rectilíneo uniforme y del movimiento uniformemente acelerado.

1.7.1 Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

El movimiento rectilíneo uniforme se caracteriza por tener una velocidad constante y, por tanto, aceleración cero.

$$\vec{a} = 0, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 = c\vec{te}$$

Notar que todo movimiento con velocidad constante ha de ser rectilíneo por fuerza. Por tanto es conveniente escoger un sistema de referencia tal que uno de los ejes (cartesianos) coincida con la dirección del movimiento para simplificar las ecuaciones.

Si escogemos el eje OX de modo que sea paralelo a $\vec{v}_0$, tenemos que, integrando la velocidad (ver ecuación (1.1)):

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)}$$

1.7.2 Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA)

Acontece cuando la aceleración a que es sometido el sistema es constante: $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = c\vec{te}$. Un ejemplo clásico es el tiro parabólico, donde un proyectil es disparado con una velocidad inicial dada, formando un ángulo determinado con la horizontal. El proyectil se ve sometido a una aceleración constante, la de la gravedad ($\vec{a} = \vec{g} = 9.8$ m/s).

En el caso general este movimiento no es rectilíneo. Sólo lo sería en el caso de velocidad inicial cero o paralela a la aceleración.

La expresión para la velocidad se obtiene integrando la aceleración:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}_0 \implies \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}_0 dt \implies$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0)}$$

A su vez la posición se calcula integrando la ecuación de la velocidad:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) \implies \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0))\, dt \implies$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 dt + \int_{t_0}^{t} \vec{a}_0 (t - t_0) dt =$$

$$\vec{v}_0(t-t_0)+\vec{a}_0\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}\right)-\vec{a}_0 t_0(t-t_0) = \vec{v}_0(t-t_0)+\vec{a}_0\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} - t_0 t + t_0^2\right) \implies$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2}$$

Notar que habitualmente las componentes de la posición $x(t), y(t), z(t)$ tienen distintos tipos de movimiento: En el tiro parabólico, la componente en la dirección de la gravedad se mueve con MUA, mientras que la componente perpendicular a la gravedad se mueve con MRU.

1.8 Cinemática del Movimiento Vibratorio Armónico

El movimiento armónico es aquél que viene descrito por la ecuación:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r}(t)}$$

con ω constante.

1.8.1 Características del movimiento

De la ecuación anterior se deduce que aceleración y vector posición:

- son paralelos.
- tienen sentidos opuestos.

Como en general en cinemática, se extrae información física de las llamadas constantes *iniciales*: En el instante de tiempo $t = t_0$, se conocen la posición $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ y la velocidad $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$. Si son paralelos ($\vec{r}_0 \parallel \vec{v}_0$), entonces el movimiento es unidimiensional, y escogemos el eje OX.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

La solución de esta ecuación es una función seno o coseno:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \theta) = A\sin(\omega t - \alpha), \quad \left(\alpha = \frac{\theta}{2}\right)$$

Donde $A > 0$ es una constante y θ es la fase inicial o resultado de la ecuación en $t = 0$. Dada la naturaleza de las funciones seno y coseno, que están desfasadas por un ángulo $\pi/2$, se puede expresar x de las dos maneras, ajustando el desfase adecuadamente.

La velocidad y la aceleración las obtenemos derivando, como siempre:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \theta)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = -A\omega\sin(\omega t - \theta)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t - \theta) = -\omega^2 x(t)$$

Posición, velocidad y aceleración son funciones periódicas de t y acotadas entre un valor máximo y mínimo, porque el coseno está acotado entre los valores $-1 \leq \cos(\omega t - \theta) \leq +1$ y porque existe un incremento de tiempo T que llamamos periodo tal que:

$$x(t+T) = x(t)$$

$$v(t+T) = v(t)$$

$$a(t+T) = a(t)$$

el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

A ω se la denomina *frecuencia angular*. Conviene no confundirla con la frecuencia $\nu = \frac{1}{T}$.

Tanto la amplitud como la fase inicial se pueden obtener a partir de las condiciones iniciales (x_0, v_0) en el tiempo $t = 0$.

$$x_0 = A\cos(-\theta) = A\cos\theta \implies \cos\theta = \frac{x_0}{A} \tag{1.3}$$

$$v_0 = -A\omega\sin(-\theta) = A\omega\sin\theta \implies \sin\theta = \frac{v_0}{A\omega} \tag{1.4}$$

y como $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

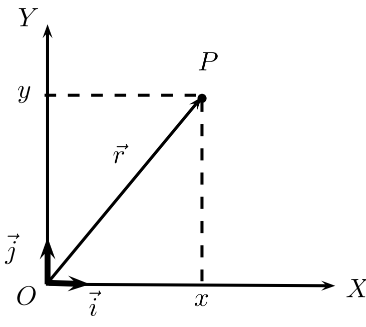
$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2\omega^2} = 1 \implies A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Por otro lado para obtener la fase θ dividimos la ecuación (1.4), de v_0 por la ecuación (1.3), de x_0:

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{A\omega\sin\theta}{A\cos\theta} = \omega\tan\theta \implies \tan\theta = \frac{v_0}{x_0\omega}$$

1.9 Movimiento en Coordenadas Polares

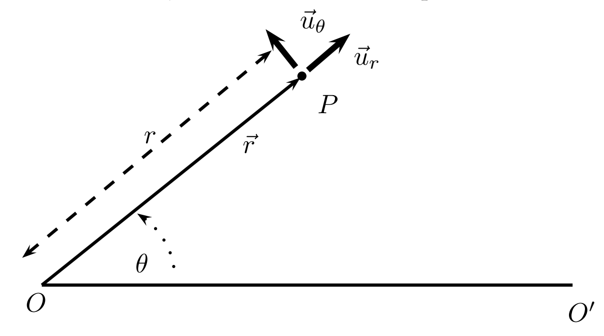
Hasta ahora hemos visto sobre todo cómo describir el transporte desde un sustema de coordenadas cartesianas.



En 2 dimensiones, las cordanadas cartesianas de P son:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

En polares, necesitamos un origen O y una recta OO'. La posición de P viene determinada por su distancia $r = |\vec{r}|$ a O y en ángulo θ de su vector posición con la recta OO', definido de manera que sea creciente en sentido antihorario.



Los vectores unitarios ahora son $\vec{u}_r$, en la dirección de $\vec{r}$ y $\vec{u}_\theta$, perpendicular al anterior y en el sentido de θ creciente.

La posición es:

$$\vec{r} = r\vec{u}_r$$

El paso de cartesianas (x, y) a polares (r, θ), y viceversa, es sencillo:

$$\begin{array}{ll} x = r\cos\theta & r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = r\sin\theta & \theta = \text{atan}(y/x) \end{array}$$

Como ya se vio con anterioridad, en cartesianas el cálculo de $\vec{v}$ y $\vec{a}$ es sencillo: al derivar nos aprovechamos de la circunstancia de que los unitarios son constantes.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j}$$

¿Cómo se calculan velocidad y aceleración en polares? También hay que derivar, pero ahora hay que tener cuidado porque los vectores unitarios no son constantes, y por lo tanto sus derivadas no son nulas.

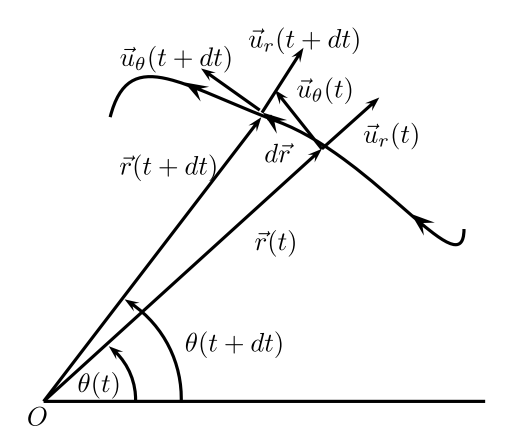
$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t),$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r(t) + r(t)\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt}, \tag{1.5}$$

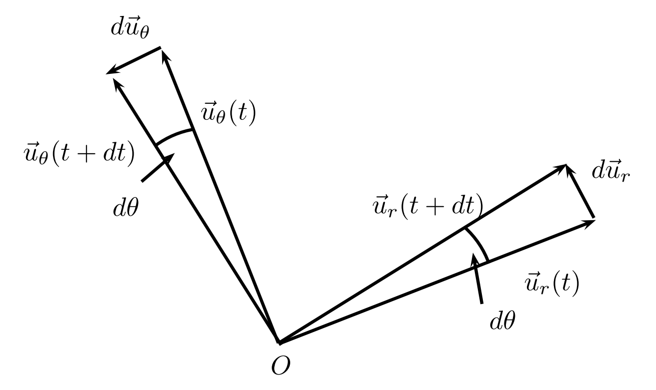
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt^2}\vec{u}_r(t) + \frac{dr(t)}{dt}\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} + \frac{dr(t)}{dt}\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} + r(t)\frac{d^2\vec{u}_r(t)}{dt^2} \implies$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2r(t)}{dt^2}\vec{u}_r(t) + 2\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt} + r(t)\frac{d^2\vec{u}_r(t)}{dt^2} \tag{1.6}$$

La pregunta es ¿cuánto valen $\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt}$ y $\frac{d^2\vec{u}_r(t)}{dt^2}$? Podemos deducirlo a partir de las siguentes figuras esquemáticas:



En la figura anterior vemos que los vectores direccionales unitarios cambian cuando la partícula se mueve. A continuación se muestra un esquema con sólo los vectores unitarios y sus cambios:



A partir de esta figura vemos cómo se deduce que

$$\left.\begin{array}{r}|d\vec{u}_r| = |\vec{u}_r|d\theta \\ d\vec{u}_r \perp \vec{u}_r \implies d\vec{u}_r \parallel \vec{u}_\theta\end{array}\right\} \implies d\vec{u}_r = d\theta\vec{u}_\theta \implies \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \tag{1.7}$$

Encontes ya sabemos cuánto vale la derivada del vector unitario $\vec{u}_r$. Además podemos calcular la segunda derivada:

$$\frac{d^2\vec{u}_r}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta + \frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \tag{1.8}$$

pero estas expresiones dependen de la derivada $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$. Según la figura anterior, también podemos deducir cuánto vale esta última:

$$\left.\begin{array}{r}|d\vec{u}_\theta = |\vec{u}_\theta|d\theta \\ d\vec{u}_\theta \parallel -\vec{u}_r\end{array}\right\} \implies d\vec{u}_\theta = -d\theta\vec{u}_r \implies \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r \tag{1.9}$$

Entonces, el resultado de la expresión de $d\vec{u}_\theta/dt$ que hemos deducido en la expresión (1.9) lo podemos sustituir en la ecuación (1.8). Obtenemos:

$$\frac{d^2\vec{u}_r}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r \tag{1.10}$$

Ahora ya conocemos el valor de las derivadas primera y segunda del vector unitario $\vec{u}_r$ y las podemos utilizar para reemplazarlos en las ecuaciones (1.5)

y (1.6). Comenzamos sustituyendo la ecuación (1.7) en la expresión para la velocidad en polares (ecuación (1.5)):

$$\left.\begin{array}{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\\ \vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r(t)+r(t)\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt}\end{array}\right\}\Longrightarrow \vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{u}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta.$$

A continuación reemplazamos en la ecuación para la aceleración en polares (ecuación (1.6)) las expresiones (1.7) y (1.10):

$$\left.\begin{array}{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\\ \frac{d^2\vec{u}_r}{dt^2}=\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r\\ \vec{a}(t)=\frac{d^2r(t)}{dt^2}\vec{u}_r(t)+2\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\vec{u}_r(t)}{dt}+r(t)\frac{d^2\vec{u}_r(t)}{dt^2}\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$$\vec{a}=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+r\left[\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\theta-\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r\right]\Longrightarrow$$

$$\vec{a}=\left[\frac{d^2r(t)}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\theta$$

Recopilando, tenemos que la velocidad es:

$$\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{u}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta.$$

y la aceleración es:

$$\vec{a}=\left[\frac{d^2r(t)}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u}_\theta$$

Recordar que la velocidad se define como la derivada de la posición (en metros) con respecto del tiempo. Análogamente, podemos definir la velocidad angular (que denotaremos como ω) como derivada del ángulo respecto del tiempo.

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}$$

y la aceleración angular (α), como segunda derivada de θ con t.

$$\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}$$

Entonces escribimos $\vec{v}$ y $\vec{a}$ así:

$$\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{u}_r+r\omega\vec{u}_\theta \quad \begin{cases} v_r=dr/dt & \text{Componente radial}\\ v_\theta=r\omega & \text{Componente polar}\end{cases}$$

$$\vec{a}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2\right)\vec{u}_r+\left(2\omega\frac{dr}{dt}+r\alpha\right)\vec{u}_\theta \quad \begin{cases} a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\omega^2 & \text{Componente radial}\\ a_\theta=2\omega\frac{dr}{dt}+r\alpha & \text{Componente polar}\end{cases}$$

Como podemos ver son expresiones complicadas, más que en cartesianas. Sin embargo son útiles para describir órbitas, giros y otros tipos de movimiento.

1.10 Movimiento Circular: Descripción en polares

Si tenemos una órbita circular, y situamos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia descrita, tenemos que la distancia r es constante. Esto hace que la descripción del movimiento utilizando coordenadas polares se simplifique mucho, porque ahora todas las derivadas de r con el tiempo desaparecen: Entonces:

$$\vec{v} = r\omega\vec{u}_\theta \quad \begin{cases} v_r = 0 & \text{Componente radial} \\ v_\theta = v = r\omega & \text{Componente polar} \end{cases}$$

Es decir, la velocidad sólo tiene componente polar, o tangencial a la trayectoria. No hay velocidad en la dirección radial, porque el radio es constante: la partícula cuyo movimiento estamos describiendo ni se aleja del centro ni se acerca a él. Conviene recordar la expresión que relaciona la velocidad lineal v con la velocidad angular ω: $v = r\omega$.

La aceleración también toma una expresión mucho más sencilla que en el caso general:

$$\vec{a} = -r\omega^2\vec{u}_r + r\alpha\vec{u}_\theta \quad \begin{cases} a_r = -r\omega^2 & \text{Componente radial} \\ a_\theta = r\alpha = \frac{d|v|}{dt} & \text{Componente polar} \end{cases}$$

Tenemos dos componentes de la aceleración: (i) la radial o *aceleración centrípeta*, dirigida hacia el centro: Esta aceleración no cambia el módulo de la velocidad sino su dirección. Según avanza la partícula, su vector velocidad va cambiando de dirección para que la trayectoria se ciña a la circunferencia de radio r. El módulo de la velocidad *sí* que puede cambiar, y esto es consecuencia de (ii) la aceleración tangencial, que tiene la orientación del vector $\vec{u}_\theta$.

1.11 Casos sencillos de Movimiento Circular

Los casos más sencillos de movimiento circular son análogos a los que hemos visto en la sección [1.7]. Tenemos el movimiento circular uniforme y el movimiento circular uniformemente acelerado.

1.11.1 Movimiento circular uniforme

No solo el radio (R) es constante, también el módulo de la velocidad lineal.

$$v = cte$$

Entonces la velocidad angular también es constante:

$$\omega = \frac{v}{R} = cte$$

y la aceleración tangencial o polar es cero:

$$a_\theta = \frac{dv}{dt} = 0$$

Por lo tanto la aceleración total solo consta de componente centrípeta o radial.

$$\vec{a} = \vec{a}_r = -r\omega^2 \vec{u}_r$$

Finalmente, para calcular la posición en polares, necesitamos el ángulo θ como función del tiempo. Lo obtenemos integrando la ω:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \implies \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt \implies \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)}$$

El periodo o tiempo de revolución es el tiempo T que la partícula tarda en regresar a la misma posición, o, dicho de otro modo, en describir un arco de ángulo 2π:

$$\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi \implies \theta(t+T) - \theta(t) = 2\pi = \omega T \implies$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

1.11.2 Movimiento circular uniformemente acelerado

Es decir, con aceleración angular $\alpha = \alpha_0$ =cte. La frecuencia angular se obtiene por simple integración:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \implies \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha_0 dt \implies \boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0)}$$

Integrando de nuevo deducimos la posición angular θ:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \implies \int_{\theta_0}^{\theta(t)} = \int_{t_0}^{t} \omega(t) dt \implies \ldots \implies \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2}$$

Chapter 2

Dinámica

2.1 Introducción

La dinámica supone ir un paso más allá de lo visto hasta ahora, la cinemática. En este capítulo no nos quedaremos en la descripción del movimiento sino que nos ocuparemos de explicarlo, estableciendo una relación causa-efecto donde la causa son las fuerzas que actúan sobre un determinado sistema y el efecto es el movimiento.

2.2 Vectores y productos

Ya que vamos a trabajar con vectores recordamos:

2.2.1 Producto por un escalar

Si $\vec{u}$ es un vector y b un escalar, el producto lo escribimos $\vec{v} = b\vec{u}$.

1. El resultado de multiplicar un vector por un escalar es un vector.
2. El resultado es paralelo al vector multiplicado. $\vec{u} \parallel \vec{v}$.
3. Ambos tienen el mismo sentido si $b > 0$, y sentidos opuestos si $b > 0$.
4. El módulo del nuevo vector $\vec{v}$ es el producto del módulo del vector que teníamos $\vec{u}$ por el valor absoluto del escalar b, es decir: $|\vec{v}| = b|\vec{u}|$.

2.2.2 Producto escalar

El producto escalar entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman un ángulo α entre ellos es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \alpha$$

Por tanto,

1. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.
2. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$.

3. El producto escalar de un vector por sí mismo es $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$.
4. El producto escalar es conmutativo: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$.

Si descomponemos los vectores en coordenadas cartesianas:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k},$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k},$$

entonces, por las características de los vectores unitarios, tenemos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

2.2.3 Producto vectorial

Es otro tipo de producto entre vectores. Mientras que en el producto escalar se obtiene como resultado un escalar, en el producto vectorial el resultado es un vector. La notación que se usa es un aspa ($\times$). Multiplicamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que teníamos antes.

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x, A_y, A_z) \times (B_x, B_y, B_z) =$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

Para calcularlo podemos utilizar las reglas del cálculo de determinantes:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Entonces :

- El resultado es perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$.
- Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, el producto vectorial es cero.
- El módulo del producto es $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$, con θ el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

2.3 Las leyes de Newton

Antes de empezar definiremos lo que es un sistema inercial:

Sistema Inercial: Si sobre un objeto no actúa fuerza alguna, cualquier sistema de referencia respecto al cual el objeto se mueve sin aceleración es un Sistema Inercial. Las leyes de Newton se refieren a sistemas de referencia inerciales.

1. Primera ley: Toda partícula libre se mueve con $\vec{v} = \vec{cte}$.
   - Una partícula libre es aquella no sometida a ninguna fuerza.
   - Esta ley se suele denominar *Ley de Inercia*.

2. Segunda ley: Si una partícula de masa m se mueve con aceleración $\vec{a}$, es porque sobre ella actúa una fuerza tal que:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

   - La fuerza la medimos en Newton (N) en el Sistema Internacional.

$$\mathrm{N} = \mathrm{Kg} \cdot \mathrm{m/s}^2$$

   - Esta ley supone una definición de fuerza.
   - *Principio de superposición*: Si sobre una partícula con masa m actúan varias fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, la aceleración resultante con que se mueve es $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n$, donde $\vec{a}_i$ es la aceleración que m tendría si solo actuase la fuerza $\vec{F}_i$. La fuerza neta resultante es la suma vectorial de cada una de las fuerzas:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

3. Tercera ley: Si un cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{AB}$ sobre un cuerpo B, entonces B ejerce sobre A una fuerza $\vec{F}_{BA}$ de módulo y dirección iguales a la anterior pero de sentido contrario.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

   - Se la denomina *Ley de Acción-Reacción*.

Existen 4 interacciones fundamentales, o formas básicas de interacción entre dos partículas

- Gravitatoria. Debida a las masas de las partículas.
- Electromagnética. Debida a las cargas eléctricas.
- Nuclear fuerte. Cohesión de los núcleos atómicos...
- Nuclear débil. Estabilidad nuclear, radiactividad...

Toda interacción real se reduce a combinaciones de éstas. Sin embargo, en ocasiones es muy complicado quedarse con estas cuatro leyes y se recurre a descripciones fenomenológicas:

- Gravedad en la superficie terrestre:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

- Fuerza normal:

$$\vec{F} = \vec{N}$$

- Ley de Hooke (en 1D):

$$F = -kx$$

- Tensiones transmitidas por cuerdas:

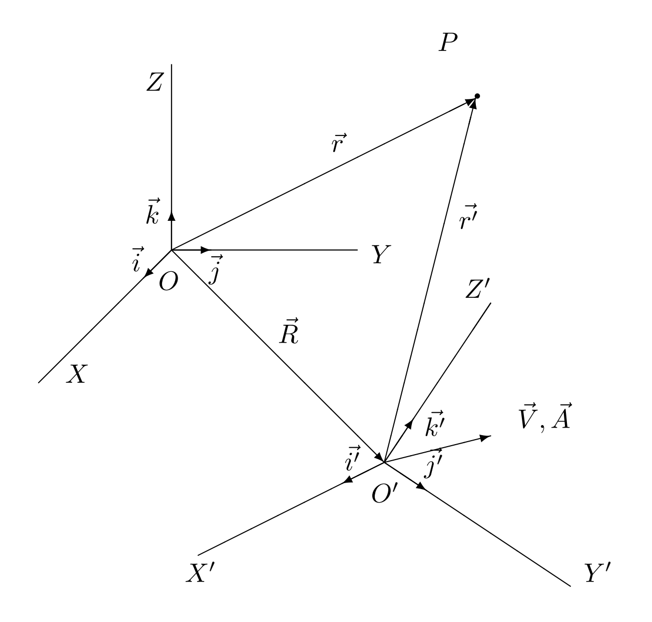
$$\vec{F} = \vec{T}$$

- Rozamientos estático y cinético:

$$|\vec{F}| = \mu_e|\vec{N}|, \quad |\vec{F}| = \mu_c|\vec{N}|$$

2.4 Sistemas de referencia Inerciales y No Inerciales

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia, uno de ellos inercial con respecto a la posición de la partícula P (sistema O) y otro no inercial, (sistema O'), que se encuentra en la posición $\vec{R}(t)$ con respecto a O, y se mueve con velocidad $\vec{V}(t)$ y aceleración $\vec{A}(t)$.



La posición de la partícula P es, para O, $\vec{r}(t)$, mientras que para O', la posición de P es $\vec{r'}(t)$:

$$O : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$O' : \vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i'} + y'(t)\vec{j'} + z'(t)\vec{k'}$$
$$\vec{v}'(t) = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{d'z}{dt}\vec{k'}$$
$$\vec{a}'(t) = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k'}$$

¿Cómo se relacionan $\vec{r}$ y $\vec{r'}$? De la figura anterior deducimos que:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$$

Para ver cómo se relacionan las respectivas velocidades que mide cada observador, el observador (O) deriva la expresión anterior:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right) = \vec{V} + \vec{v'}$$

Al realizar esta operación hay que tener en cuenta que los vectores unitarios $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$ son fijos para ambos observadores (y por tanto sus derivadas son cero), porque aunque (O') se mueve con respecto a (O), sus unitarios siempre tienen un mismo módulo y señalan en las mismas direcciones. Otra cosa sería si hubiese una rotación de un observador con respecto del otro: entonces los unitarios de (O') *sí* que cambiarían de orientación para (O) y sus derivadas serían más complicadas.

De nuevo, (O) deriva para relacionar las aceleraciones que cada uno mide:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2}\left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right) = \vec{A} + \vec{a'}$$

Es decir, al pasar de un sistema de referencia (O) a otro (O'), y si el movimiento de uno con respecto del otro es de traslación (y no rotación) tal y como se ha descrito en la figura anterior, el cambio en los vectores $\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$ es tal que:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{V} + \vec{v'}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{A} + \vec{a'}}$$

Esto se ha de tener en cuenta a la hora de aplicar las leyes de Newton.

2.5 Dinámica de una partícula

El estado dinámico de una partícula viene dado por una serie de datos: masa, posición y velocidad en cada instante de tiempo respecto a un O.

Si conocemos la masa de una partícula, y esta es constante, el estado dinámico de una partícula se determina mediante la 2^a Ley de Newton, que nos permite, a cada instante de tiempo, conocer como cambian $\vec{r}(t), \vec{v}(t) \rightarrow \vec{r}(t+dt), \vec{v}(t+dt)$.

$$\vec{r}(t+dt) = \vec{r}(t) + d\vec{r} = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)dt$$

$$\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + d\vec{v} = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)dt = \vec{v}(t) + \frac{\vec{F}(t)}{m}dt$$

Así que si conocemos $\vec{F}(t)$, utilizando la 2^a Ley y lo que sabemos de cinemática, podemos conocer punto a punto el estado dinámico. Pero lo que hemos hecho ha sido obtener una ley diferencial, que nos permite pasar de t a $t+dt$. Si lo que queremos es tener una expresión analítica de $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$, entonces necesitamos integrar las ecuaciones anteriores utilizando las condiciones iniciales $\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$$

Como este cálculo es en muchas ocasiones inviable analíticamente, es útil introducir otras magnitudes dinámicas que nos permitan obtener información del sistema y simplificar los cálculos.

2.5.1 Momento lineal

Se define como:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

Se mide en $Kg \cdot m/s$.

Relación con la 2^a Ley : En casos de masa constante es muy útil, puesto que se relaciona fácilmente con la fuerza total $\vec{F}_T$ que actúa sobre un sistema:

$$\vec{F}_T = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Relación con la 1^a Ley : Cuando no hay interacción ninguna, $\vec{F}_T = \vec{0}$, gracias a la ecuación anterior deducimos que:

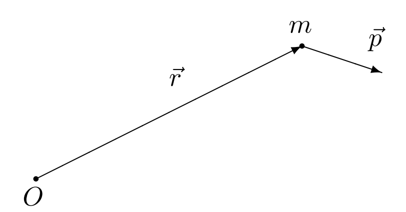
$$\vec{F}_T = \vec{0} = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \vec{p} = \vec{\text{cte}}$$

2.5.2 Momento angular

El momento angular de una partícula $\vec{J}$, definido respecto a un origen de coordenadas O, es:

$$\boxed{\vec{J}_O = \vec{r} \times \vec{p}}$$

donde O es el origen desde donde se mide $\vec{r}$. Al cambiar de origen, cambia el resultado: desde O mido $\vec{J}_O$, y desde O' mido $\vec{J}_{O'}$, pero $\vec{J}_O \neq \vec{J}_{O'}$.



El momento angular es una magnitud útil porque en algunos casos se conserva. Vamos a ver cómo es su derivada:

$$\vec{J}_0 = \vec{r} \times \vec{p} \implies \frac{d\vec{J}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Calculamos por separado los dos sumandos que nos han salido:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0} \\ \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \end{array}\right\} \implies \frac{d\vec{J}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Entonces, si encontramos un sistema de referencia O en el que el vector posición $\vec{r}$ sea paralelo al vector fuerza $\vec{F}$, entonces $\frac{d\vec{J}_O}{dt} = 0$, por las propiedades del producto vectorial, y se conservará el momento angular.

Se mide en $Kg \cdot m^2/s$.

2.5.3 Momento de una fuerza

El momento de una fuerza $\vec{N}_O$, definido respecto a un origen O desde el que medimos la posición $\vec{R}$ del punto donde se aplica la fuerza $\vec{F}$, se define:

$$\boxed{\vec{N}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

El momento de una fuerza nos da cuenta de cómo de eficaz es la fuerza $\vec{F}$ a la hora de rotar un cuerpo con respecto a un eje. El ejemplo tradicional es el de una puerta. Aplicando la misma fuerza justo al lado de las bisagras no obtenemos el mismo resultado que si lo hacemos en el extremo opuesto de la puerta, junto al pomo.

El momento de una fuerza es importante en estática. Para que un sistema esté en equilibrio es necesario que se cumplan dos condiciones, que el sumatorio (o la resultante) de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema sea cero, y que el sumatorio (o la resultante) de sus momentos también sea cero.

2.5.4 Impulso de una fuerza

El impulso $\vec{F}$ de una fuerza $\vec{F}$ que actúa entre los instantes de tiempo t_1 y $t_2 > t_1$, se define:

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt}$$

Como se vio con anterioridad, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \vec{F}dt = d\vec{p} \implies$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p}$$

es decir, $\vec{I}$ nos da información que depende de los estados inicial (en $t = t_1$) y final (en $t = t_2$).

Es útil porque nos permite conocer cuál ha sido la fuerza media que se ha estado aplicando entre t_1 y t_2,

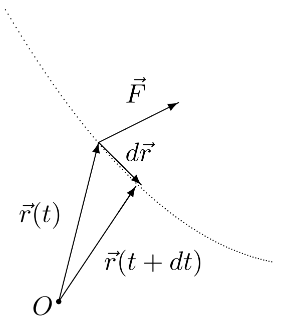
$$\langle\vec{F}\rangle = \frac{\vec{I}}{t_2 - t_1}$$

También, en caso de ser nulo, nos permite afirmar que $\vec{p}(t_2) = \vec{p}(t_1)$.

2.5.5 Trabajo

El trabajo diferencial realizado por una fuerda $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula que se desplaza una distancia $d\vec{r}$ se define así:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\ dr\ \cos\theta$$



En una trayectoria que va desde una posición inicial $\vec{r}_1$ hasta una posición final $\vec{r}_2$, integramos la expresión anterior para conocer el trabajo total realizado:

$$\boxed{W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Si la fuerza es constante la puedo sacar de la integral:

$$W = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\Delta\vec{r})$$

Las unidades de medida del trabajo en SI son los Julios: $1J = 1N \times m$. Un Julio equivale a un Newton de fuerza por metro. Por la definición de N: $J = Kg\ m^2/s^2$.

2.5.6 Potencia

La potencia P se define como el ritmo con el que una fuerza $\vec{F}$ realiza un trabajo, es decir, como trabajo W por unidad de tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

como $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$, sustituimos en la expresión anterior:

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Esta es la potencia instantánea. Entre los instantes de tiempo t_1 y t_2, la potencia media $\langle P \rangle$ se define como:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} dW = \frac{W}{\Delta t}$$

La potencia se mide en vatios: $1W = 1J/s$. Un vatio es un trabajo de un Julio realizado en un segundo.

2.5.7 Energía cinética

La energía cinética de una partícula que tiene masa m y se mueve con velocidad $\vec{v}$, se define:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}}$$

Las unidades son: $Kg\ m^2/s^2 = J$ los Julios. Misma unidad que el trabajo. Es también habitual utilizar la letra T.

Teorema Trabajo-Energía Cinética

Recordemos la expresión del trabajo realizado por una fuerza que actúa sobre una partícula entre sus posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como $d\vec{r} = \vec{v}dt$, y $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, escribimos:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt$$

Ahora nos aprovecharemos de la relación diferencial:

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

y por lo tanto el trabajo nos queda:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{m}{2} d(\vec{v}^2) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

$$\boxed{W = \Delta E_c}$$

El cambio de energía cinética en una partícula durante su trayectoria es igual al trabajo que las fuerzas que actúan sobre ella han realizado a lo largo de dicha trayectoria.

Las fuerzas no siempre realizan trabajo. El ejemplo típico es el de movimiento circular uniforme, con aceleración centrípeta, dirigida hacia el centro, y por lo tanto la fuerza también. El diferencial desplazamiento es siempre perpendicular a la fuerza centrípeta, por tanto: $\vec{F} \perp d\vec{r} \implies W = 0$.

2.5.8 Fuerzas Conservativas

Como hemos visto antes, el trabajo total realizado por una fuerza entre dos puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ es una integral. Y por lo tanto, en general, depende de cómo se haga ese camino desde la posición $\vec{r}_1$ hasta la $\vec{r}_2$. Pero algunas fuerzas, llamadas conservativas, se caracterizan por realizar un trabajo que solo depende de las posiciones inicial y final, y no de *lo que pase* durante el camino. Dicho de otro modo, son fuerzas que, si actúan durante una trayectoria cerrada, donde el punto final y el inicial coinciden, realizan un trabajo total cero:

$$\oint_c \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0$$

para todo camino cerrado C.

Como se ha dicho antes, el trabajo en una trayectoria cualquiera, entre $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ es:

$$W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

y si la fuerza es conservativa, esta cantidad solo depende de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2 \implies$ si escogemos un punto de referencia $\vec{r}_{\text{ref}}$, el trabajo que una fuerza realiza para trasladar una partícula desde un $\vec{r}$ general hasta la referencia escogida es una cantidad que solo depende de $\vec{r}$. Esto podemos decirlo porque trabajamos con fuerzas conservativas.

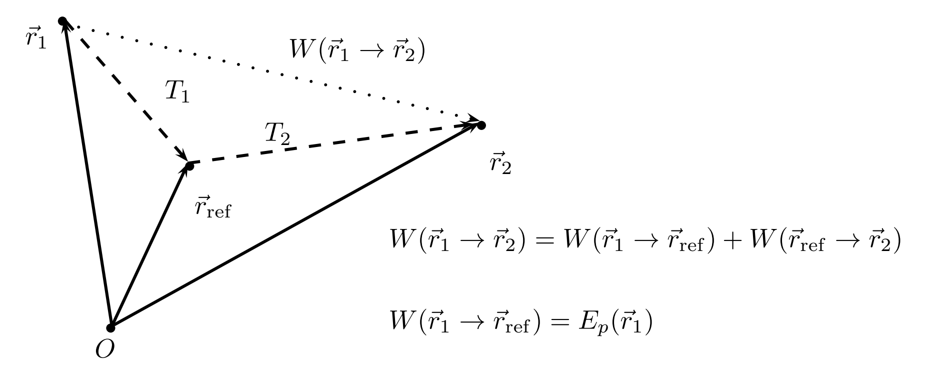
2.5.9 Energía Potencial

Entonces, como el trabajo para traer nuestra partícula hasta la referencia $\vec{r}_{\text{ref}}$ solo depende de $\vec{r}$, podemos definir la energía potencial, una función escalar que dependa de $\vec{r}$ como esa cantidad de trabajo realizado:

$$E_p(\vec{r}) = W(\vec{r} \to \vec{r}_{\text{ref}}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_{\text{ref}}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' = -\int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,'$$

Normalmente lo más cómodo es asignarle a la $\vec{r}_{\text{ref}}$ una energía potencial cero. Entonces, la energía potencial en $\vec{r}$, es la cantidad de trabajo que haría falta para llevar una partícula desde $\vec{r}$ hasta $\vec{r}_{\text{ref}}$, o dicho de otro modo, la cantidad de trabajo, con signo cambiado, que se habría tenido que realizar para llevar la partícula desde $\vec{r}_{\text{ref}}$ hasta $\vec{r}$.

Al llevar una partícula de una posición $\vec{r}_1$ hasta $\vec{r}_2$, y como estamos con fuerzas conservativas, se hace el mismo trabajo independientemente de la ruta seguida: El trabajo total será el mismo si seguimos la ruta de puntos o si vamos por la línea discontínua, es decir, por el tramo T_1 y luego por el tramo T_2.



$$W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2) = W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_{\text{ref}}) + W(\vec{r}_{\text{ref}} \to \vec{r}_2)$$

$$W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_{\text{ref}}) = E_p(\vec{r}_1)$$

$$W(\vec{r}_{\text{ref}} \to \vec{r}_2) = -E_p(\vec{r}_2)$$

Entonces podemos seguir la ruta propuesta en el esquema superior: para ir de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ podemos pasar por $\vec{r}_{\text{ref}}$. El trabajo realizado es

$$W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2) = W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_{\text{ref}}) + W(\vec{r}_{\text{ref}} \to \vec{r}_2)$$

De estos dos sumandos, el primero es, por definición, $E_p(\vec{r}_1)$, y el segundo es $-E_p(\vec{r}_2)$. Entonces, la cantidad de trabajo que se ha realizado para ir desde $\vec{r}_1$ hasta $\vec{r}_2$ es:

$$W(\vec{r}_1 \to \vec{r}_2) = E_p(\vec{r}_1) - E_p(\vec{r}_2) = -\Delta E_p.$$

Es decir, tal y como hemos definido la E_p, podemos afirmar que, con fuerzas conservativas, el cambio de energía potencial al desplazar una partícula de una posición a otra es igual al trabajo realizado por dicha fuerza con signo negativo.

$$\boxed{W = -\Delta E_p}$$

Para la energía potencial a veces se utiliza la notación U.

2.5.10 Energía Mecánica

Recordatorio:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Con cualquier } \vec{F}: & W = \Delta E_c \\ \text{Con } \vec{F} \text{ conservativa:} & W = -\Delta E_p \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ Con } \vec{F} \text{ conservativa: } \Delta E_c = -\Delta E_p \Longrightarrow$$

$$\Delta(E_c + E_p) = 0$$

Es decir, la cantidad $E_c + E_p$ se mantiene constante con Fuerzas conservativas. Esta cantidad se denomina *Energía Mecánica.*

$$\boxed{E = E_c + E_p}$$

Utilidades de la Energía Mecánica

La energía proporciona información importante: Si conocemos el valor de la energía mecánica en un punto concreto $\vec{r}_0$, y estamos en un sistema conservativo, ya sabemos que esa cantidad se va a conservar: la energía mecánica total no cambia, y vale lo mismo en cada posición $\vec{r}$: $E(\vec{r}_0) = E(\vec{r})$.

Si además conocemos la expresión de la energía potencial $E_p(\vec{r})$, y las condiciones iniciales, podemos determinar el movimiento:

$$E_p(\vec{r}) + \frac{1}{2}mv^2 = E \Longrightarrow E_p(\vec{r}) + \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = E \Longrightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - E_p(\vec{r})\right) \Longrightarrow$$

$$dt = \frac{d\vec{r}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(\vec{r})\right)}} \Longrightarrow t - t_0 = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} \frac{d\vec{r}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(\vec{r})\right)}}$$

de esta última expresión podemos despejar $\vec{r}(t)$.

2.6 Ejemplos de Fuerzas Conservativas

2.6.1 El caso Gravitatorio

Una partícula de masa m_1 situada en la posición $\vec{r}_1$ ejerce sobre una masa m_2 ubicada en la posición $\vec{r}_2$, una fuerza :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

Donde el vector $\vec{r}_{12}$ es el que va desde la partícula 1 hasta la partícula 2:

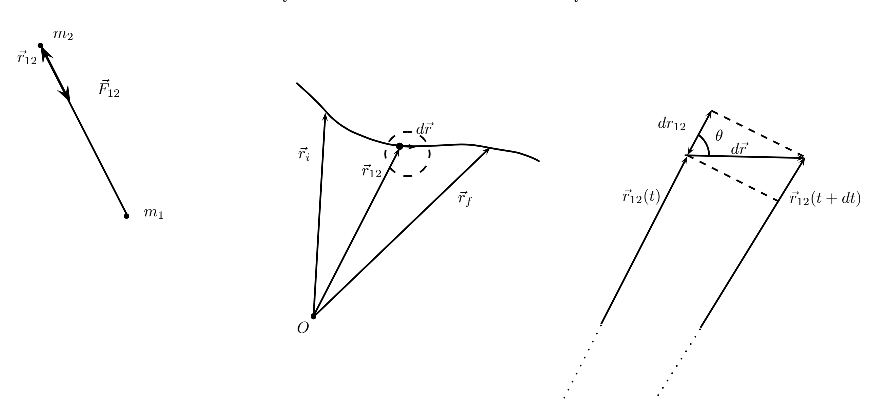
$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

por otro lado G es la *constante de gravitación universal*, y vale $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/Kg^2.

2.6.2 Energía potencial gravitatoria

Antes de establecer una expresión para la energía potencial gravitatoria debemos comprobar si la fuerza de la gravedad es conservativa. Es decir, debemos comprobar si el trabajo para ir desde una posición $\vec{r}_i$ inicial a una final $\vec{r}_f$ depende de la trayectoria seguida.

$$W(\vec{r}_i \to \vec{r}_f) = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r} = -Gm_1m_2 \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{\vec{r}_{12} \cdot d\vec{r}}{r_{12}^3}$$



del esquema superior podemos deducir que:

$$\vec{r}_{12} \cdot d\vec{r} = |\vec{r}_{12}||d\vec{r}| \cos\theta = |\vec{r}_{12}|d|\vec{r}_{12}| = r_{12}dr_{12}$$

porque $|d\vec{r}| \cos\theta$ es la proyección del vector $d\vec{r}$ sobre $\vec{r}_{12}$, y coincide con la variación del módulo de éste último. Obsérvese que $|\vec{r}_{12}(t+dt)| = |\vec{r}_{12}(t)|+dr_{12}$.

entonces, el trabajo realizado lo escribimos como:

$$W(\vec{r}_i \to \vec{r}_f) = -Gm_1m_2 \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{dr_{12}}{{r_{12}}^2} = +Gm_1m_2 \left[\frac{1}{r_{12}}\right]_{r_i}^{r_f} = Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

es decir, el trabajo que realiza la fuerza de la gravedad cuando la partícula va desde $\vec{r}_i$ hasta $\vec{r}_f$ no depende del camino seguido sino de dichas posiciones inicial y final. Por lo tanto es una fuerza conservativa y podemos definir la energía potencial gravitatoria de un punto $\vec{r}$ general a partir de un $\vec{r}_{\text{ref}}$ que escojamos:

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{r_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r} = -Gm_1m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{\text{ref}}}\right) = E_p(r)$$

Por comodidad aquí conviene tomar la referencia $r_{\text{ref}} = \infty$, así:

$$E_p(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}$$

Los cuerpos de masa M y simetría esférica generan, fuera de la esfera de radio R, un campo gravitatorio igual al que existiría si en su centro hubiese una partícula puntual de la misma masa.

Cerca de la superficie, es decir, a altura h (distancia del centro $r = R + h$) pequeña ($r = R + h \simeq R$), la atracción sobre una masa m es:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{R^2}\vec{u}_r = m\vec{g}$$

Así definimos la $\vec{g}$, aceleración del campo gravitatorio, aproximadamente constante si nos movemos en distancias a la superficie que sean muy pequeñas comparada con el radio terrestre.

La fuerza del peso es $\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$. Entonces, para estos casos en que tenemos un campo uniforme podemos volver a calcular la energía potencial gravitatoria:

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{\rm ref}}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -mg\int_{\vec{r}_{\rm ref}}^{\vec{r}} (-\vec{k})\cdot d\vec{r} = mg\int_{\vec{r}_{\rm ref}}^{\vec{r}} dz = mg(z - z_{\rm ref}) = E_p(z)$$

Si escribimos la altura respecto a una referencia como $h = z - z_{\rm ref}$ tenemos la típica expresión:

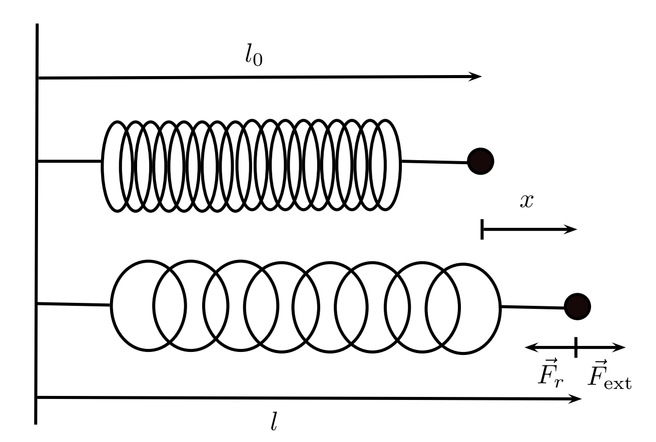
$$\boxed{E_p = mgh}$$

Recordar que esta expresión vale solo para campos gravitatorios creados por una masa sobre volumen esférico en las proximidades de su superficie.

2.6.3 El caso elástico

En un resorte ideal la fuerza recuperadora es proporcional a la deformación. Supongamos que el muelle, cuando no está deformado, tiene una longitud natural l_0 y mediante la acción de una fuerza externa $\vec{F}_{\rm ext}$ lo deformamos una distancia x hasta tener una longitud $l = l_0 + x$. Entonces, según la *Ley de Hooke*, aparece una fuerza $\vec{F}_r$ en el muelle tal que:

$$\vec{F}_{\rm ext} = -\vec{F}_r = k(l - l_0)\vec{i} = -kx$$



donde k es una constante.

Conviene recordar que la fuerza recuperadora siempre es en el sentido opuesto a la deformación. Si la deformación es positiva, la fuerza es negativa y viceversa.

Vamos a comprobar a continuación si la fuerza recuperadora es conservativa.

El trabajo realizado al arrastrar una partícula sujeta al extremo de un muelle desde x_1 hasta x_2 es:

$$W(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_r \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx\vec{i})\cdot(dx\vec{i}) = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

El resultado como vemos es una función que depende de los extremos inicial y final del trayecto seguido, pero no del camino. Por tanto es una fuerza conservativa y podemos definir una energía potencial elástica.

$$E_p(x) = -\int_{x_{\text{ref}}}^{x} F_r dx = \frac{1}{2}(x^2 - x_{\text{ref}}^2)$$

Se escoge como referencia el origen de coordenadas, $x_{\text{ref}} = 0$, de manera que $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$, con $x = l - l_0$.

Entonces, podemos afirmar que si sobre una partícula de masa m actúa únicamente una fuerza elástica de Hooke, su energía mecánica se conserva:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = cte$$

2.7 Dinámica de Sistemas de Partículas

Llegados a este punto pasaremos a considerar sistemas de partículas: conjuntos de partículas en el estudio, que interaccionan entre sí y con otros sistemas.

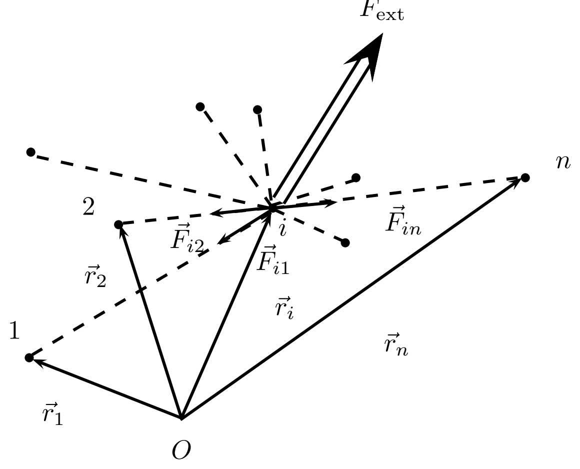
Antes de nada definimos el centro de masas. Si hay n partículas, cada una de llas con una masa m_i y posición $\vec{r}_i$, entonces, la masa total es:

$$M = \sum_{i=1,n} m_i$$

y el centro de masas $\vec{R}$:

$$M\vec{R} = \sum_{i=1,n} m_i\vec{r}_i$$

Más tarde nos será útil para entender las interacciones presentes en el sistema. Veamos como son dichas interacciones.



En el esquema hay dibujadas n partículas. La i-ésima, o partícula i interacciona con todas y cada una de las demás partículas que conforman el sistema (Fuerzas Internas) y por otro lado está sometida a una Fuerza Externa o resultante de las fuerzas externas $\vec{F}_{\text{ext,i}}$.

Obsérvese que las fuerzas internas las hemos denotado de la siguiente manera: La fuerza que actúa sobre i como consecuencia de su interacción con la partícula 2 es $\vec{F}_{i2}$ etc...

Entonces la segunda ley de Newton, para esta partícula la escribiríamos:

$$m_i\vec{a}_i = m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1,n}^{j\neq i}\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{\text{ext,i}}$$

Ahora aplicamos la segunda ley al sistema de partículas en su conjunto, es decir, sumamos la expresión anterior para las n partículas. Pero antes podemos tener en cuenta un aspecto de las fuerzas internas, y es que, debido a la ley de acción reacción, por cada fuerza interna abrá una igual y de sentido contrario: Para cada pareja de partículas i y j se anulan las fuerzas internas entre ellas: $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$.

$$\sum_{i=1,n} m_i\vec{a}_i = \sum_i\left(\sum_j^{i\neq j}\vec{F}_{ij}\right) + \sum_{i=1,n} F_{\text{ext,i}}$$

$$\sum_i\left(\sum_j^{i\neq j}\vec{F}_{ij}\right) = \vec{0}$$

Entonces, la segunda ley de Newton la podemos reescribir así:

$$\sum_{i=1,n} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1,n} F_{\text{ext,i}} = \vec{F}_{\text{ext,T}}$$

$$\sum m_i\vec{a}_i = \sum m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i\vec{v}_i\right) = \vec{F}_{\text{ext,T}}$$

La fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema, $\vec{F}_{\text{ext,T}}$, es la derivada de la suma de los momentos lineales individuales de cada partícula. A partir de esta expresión cobra sentido la definición de momento lineal del sistema: $\vec{P} = \sum\vec{p}_i$. De modo que obtenemos una ecuación análoga a la que ya conocíamos para una partícula, que ahora es válida en sistemas de más de una partícula.

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext,T}} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Al igual que en una partícula escribimos $\vec{p} = m\vec{v}$, en un sistema podemos escribir $\vec{P} = M\vec{V}$. La masa M es la masa total del sistema, pero, ¿Cuál es la velocidad $\vec{V}$?.

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}\right)$$

es decir, $\vec{V}$ es la velocidad con que se mueve el centro de masas $\vec{R}$ que habíamos definido al comienzo de este apartado.

Recapitulando, tenemos que, en sistemas de varias partículas:

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

$$\vec{F}_{\text{ext,T}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt} = M\vec{A}$$

son expresiones análogas a las de una partícula, o más bien generalizaciones.

De estas ecuaciones se deduce que el movimiento del centro de masas es independiente de cómo sean las fuerzas interiores, y tampoco depende de la fuerza exterior aplicada a cada partícula del sistema: solo depende de la fuerza exterior resultante.

Además, al igual que sucedía con una partícula, en caso de fuerza externa resultante nula, se conserva el momento lineal:

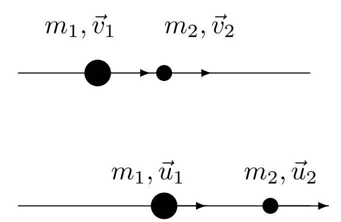
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext,T}}$$

$$\text{si } \vec{F}_{\text{ext,T}} = \vec{0} \implies \vec{P} = \vec{cte}$$

2.8 Colisiones entre partículas

2.8.1 Partículas indeformables y libres

Estudiamos el caso de colisiones entre esferas indeformables y aisladas, no sometidas a fuerza alguna:



Como hemos dicho que están aisladas, no existen fuerzas externas, y por lo tanto el momento lineal del sistema se conserva:

Antes del choque, tenemos: $\vec{P}_i = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$.

Después de la colisión: $\vec{P}_f = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \tag{2.1}$$

Además suponemos que la colisión es frontal, todas las velocidades, antes y después, apuntan en la misma dirección (aunque los sentidos puedan ser opuestos), la que marca el vector unitario $\vec{i}$.

Como se ha dicho antes, las esferas no se deforman, así que no se realiza ningún trabajo interno (de deformación). Esto unido a la ausencia de fuerzas externas nos permite afirmar que no hay trabajo ninguno durante el proceso: $W = 0 \implies E_c = cte$.

Antes del choque la energía cinética es $E_{ci} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$.

Y después: $E_{cf} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$.

Entonces:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \tag{2.2}$$

A partir de las ecuaciones 2.1 y 2.2, y suponiendo conocidas las masas y velocidades iniciales, deducimos las velocidades finales.

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Cuando se conservan tanto el momento lineal como la energía cinética se dice que se trata de una *colisión elástica*.

La velocidad relativa entre las partículas se conserva: $u_1 - u_2 = v_2 - v_1$.

2.8.2 Colisión no rígida

Si la colisión es no rígida, con deformación, se puede realizar un trabajo interno W_{int} durante la misma, en el caso de que la fuerza interna sea no conservativa. En ese caso la energía cinética no se conserva. Se emplea entonces el llamado coeficiente de restitución f que nos señana cómo ha sido la variación de la velocidad relativa:

$$f = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$$

Si conocemos f y las velocidades iniciales v_1 y v_2, podemos despejar las finales:

$$\left.\begin{array}{c} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ u_2 - u_1 = f(v_2 - v_1) \end{array}\right\} \implies u_1, u_2$$

2.8.3 Colisión no aislada

Ahora lo que sucede es que el momento no se conerva, porque existen fuerzas externas.

$$\vec{F}_{\text{ext}} \neq 0 \implies \vec{P} \neq cte$$

Como sabemos, la variación del momento lineal la podemos conocer a través de la variable Impulso:

$$\vec{I}_{\text{ext}} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{\text{ext}} dt = \Delta\vec{P}$$

Si la colisión es percusiva, es decir, si $\Delta t \sim 0$, la integral de una fuerza finita es aproximadamente cero, así que sigue siendo buena la aproximación de $\vec{P}_i \sim \vec{P}_f$, tomando los instantes inmediatamente anterior y posterior al choque.

Chapter 3

Oscilaciones

3.1 Introducción

Entendemos por oscilacion el movimiento que surge tras la perturbación de un sistema desde una posición de equilibrio estable. La oscilación es un "vaivén" en torno a una posición de equilibrio.

El modelo más sencillo es el de la Oscilación Armónica, que ya conocemos. En el caso de que la posición de equilibrio sea $x_{\text{eq}} = 0$, el sistema viene descrito por la ecuación diferencial característica:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

3.2 Cinemática de la oscilación armónica

La solución a esta ecuación es una función sinusoidal:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\cos(\omega t + \beta) \ , \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

La amplitud es A, la fase inicial es α (o β). La velocidad y aceleración se determinan por simple derivación:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$

Estas funciones se caracterizan por su periodicidad. Pasado un periodo P:

$$\left.\begin{array}{r} x(t) = x(t+P) \\ v(t) = v(t+P) \end{array}\right\} \to P = \frac{2\pi}{\omega}$$

La frecuencia es $\nu = 1/P$, y la frecuencia angular es la ω de la ecuación diferencial característica $\omega = 2\pi/P = 2\pi\nu$.

En caso de que la posición de equilibrio sea otra: $x_{\text{eq}} \neq 0$, cambia algo la ecuación característica, porque ahora la posición es:

$$x(t) = x_{\text{eq}} + A\sin(\omega t + \alpha) \implies$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2(x - x_{\text{eq}})$$

Es decir, en general, con $x_{\text{eq}} \neq 0$, el movimiento oscilatorio armónico se rige por la ecuación diferencial característica:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(x - x_{\text{eq}})} \quad (3.1)$$

Conociendo las condiciones iniciales podemos deducir amplitud y fase inicial. Es decir, conociendo posición y velocidad en el instante $t = 0$, (x_0 y v_0 respectivamente), podemos averiguar A y α:

$$\left.\begin{array}{c} x_0 = x(t=0) = x_{\text{eq}} + A\sin\alpha \\ v_0 = v(t=0) = A\omega\cos\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_0 - x_{\text{eq}} = A\sin\alpha \\ \frac{v_0}{\omega} = A\cos\alpha \end{array}\right\}$$

Dividiendo estas dos últimas ecuaciones:

$$\frac{\omega(x_0 - x_{\text{eq}})}{v_0} = \tan\alpha$$

Mientras que elevando al cuadrado esas mismas ecuaciones y sumando:

$$(x_0 - x_{\text{eq}})^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2$$

En resumen, conociendo x_0 y v_0 tenemos que:

$$A = \sqrt{(x_0 - x_{\text{eq}})^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\alpha = \arctan\left[\frac{\omega(x_0 - x_{\text{eq}})}{v_0}\right]$$

3.3 Dinámica de la oscilación armónica

Ahora pasamos a la dinámica de este tipo de oscilaciones → nos preocupamos de la fuerza que la produce, su energía...

Utilizando la ecuación $x(t)$ y la seguna ley de Newton calculamos la fuerza:

$$\left.\begin{array}{c} x = x_{\text{eq}} + A\sin(\omega t + \alpha) \\ F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow F = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \alpha) = -m\omega^2(x - x_{\text{eq}})$$

Es decir, nos ha salido una fuerza que es proporcional a $-(x - x_{\text{eq}})$. Es decir, una fuerza de la misma naturaleza que la de los muelles. La constante de proporcionalidad $m\omega^2$ haría las veces de constante recuperadora del muelle k

$$k = m\omega^2 \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

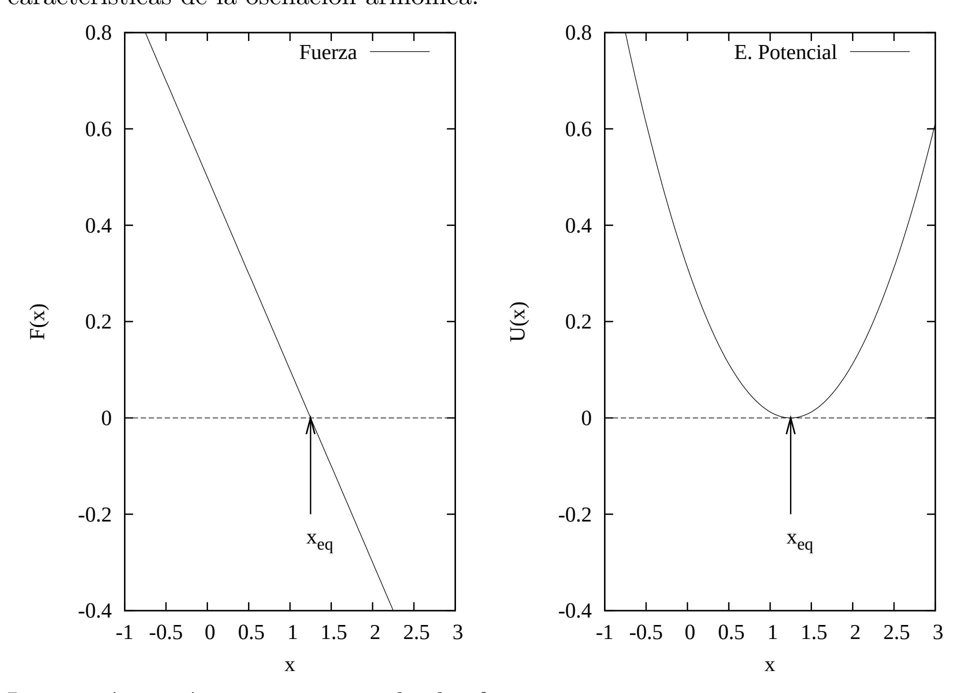
Cuando $x = x_{\text{eq}}$, la fuerza es cero $F(x_{\text{eq}}) = 0$. En caso contrario es proporcional al desplazamiento $x - x_{\text{eq}}$ dirigida hacia x_{eq}.

Como es del mismo tipo que la fuerza en muelles, es decir, sigue la ley de Hooke, sabemos que es una fuerza conservativa (como se vio en el tema 2).

Entonces, podemos definir una energía potencial E_p. Para ello seleccionamos una referencia. En este caso lo más sencillo es tomar $x_{\text{ref}} = x_{\text{eq}}$, para así tener $E_p(x_{\text{eq}} = x_{\text{ref}}) = 0$.

$$E_p(x) = -\int_{x_{\text{ref}}=x_{\text{eq}}}^{x} -k(x' - x_{\text{eq}})dx' = \dots \frac{1}{2}k(x - x_{\text{eq}})^2$$

Como vemos, mientras que la fuerza tenía dependencia lineal con el desplazamiento, la energía potencial tiene una dependencia cuadrática. Esta es una de las características de la oscilación armónica.



La energía mecánica, como en todas las fuerzas conservativas, se conserva.

$$E_m = E_c + E_p$$
$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - x_{\text{eq}})^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$
$$E_c(x) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

Por tanto, si recordamos que $k = m\omega^2$ y sumamos las dos últimas expresiones:

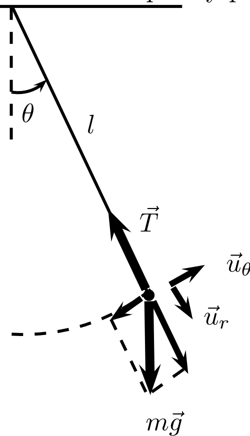
$$\boxed{E_m = E_p(x) + E_c(x) = \frac{1}{2}kA^2}$$

La energía mecánica es constante.

3.4 Péndulo simple

Por péndulo simple entendemos aquél que tiene una masa puntual sostenida por una cuerda inextensible de masa despreciable, que no tiene pérdidas por rozamiento con el aire o con la pared de la que está suspendido.

A continuación tenemos un pequeño esquema con las fuerzas que actúan sobre la masa m cuando se desplaza un ángulo θ con respecto a su posición de equilibrio. Actúan por un lado el peso y por otro la tensión del hilo.



La fuerza resultante por tanto será la suma vectorial de las dos que actúan:

$$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Descomponemos las fuerzas en las direcciones radial y angular:

$$\vec{F} = mg\sin\theta(-\vec{u}_\theta) + (mg\cos\theta - T)\vec{u}_r$$

En la dirección radial la fuerza resultante es cero (notar que el cordel tiene longitud fija, l). En la dirección angular estamos fuera de equilibrio, con lo cual la suma de las fuerzas:

$$F_\theta = ma_\theta$$

La aceleración angular o polar a_θ es, para radio fijo: $a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Por lo tanto,

$$F_\theta = ma_\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

despejando, obtenemos la siguiente ecuación del movimiento:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

En el caso de que las oscilaciones sean de pequeña amplitud, es decir, con θ bajo, podemos aproximar el seno por el ángulo.

Si $\theta \to 0 \implies \sin\theta \simeq \theta$ (¡Ojo! trabajamos con radianes).

Entonces, la ecuación para pequeños ángulos es la de una oscilación armónica:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

El ángulo de equilibrio es obviamente $\theta_{\mathrm{eq}} = 0$.

Comparando esta ecuación que hemos obtenido con ecuación diferencial característica del movimieno oscilatorio armónico (ecuación (3.1)), tenemos que la frecuencia es $\omega^2 = g/l$, mientras que el periodo es $P = 2\pi\sqrt{l/g}$. Además, la evolución del ángulo θ responde a una ecuación del tipo: $\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t + \alpha)$, con amplitud θ_0.

3.5 Oscilaciones amortiguadas

Hasta ahora hemos estudiado el oscilador armónico ideal,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \implies x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$$

y con frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Sin embargo es difícil encontrar en la naturaleza situaciones ideales. Los osciladores más realistas son aquéllos en los que actúa también una fuerza disipativa, algún tipo de fricción que se opone al movimiento. El modelo más comunmente empleado para describir estas situaciones es el de una fuerza proporcional a la velocidad del oscilador, pero con sentido contrario a ésta:

$$\vec{F} = -c\vec{v}$$

con c =cte. Entonces a la ecuación característica le tenemos que añadir un término:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

como $k/m = \omega_0^2$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

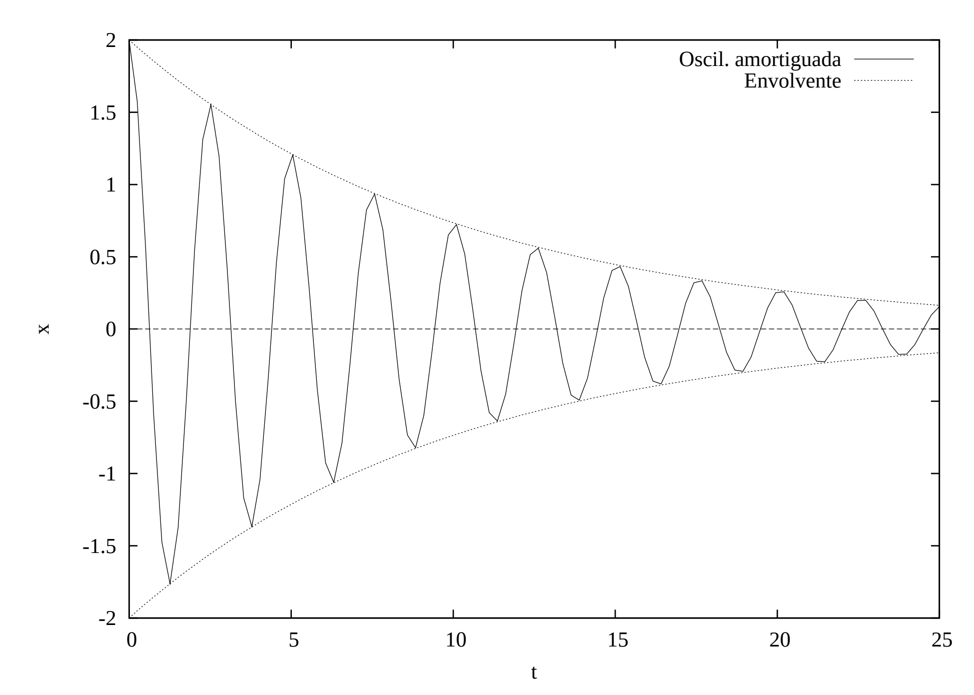
Definimos el coeficiente de amortiguamiento, $\gamma = \frac{c}{2m}$ La solución a este sistema, para amortiguamientos pequeños (podéis hacer el ejercicio) es la siguiente ecuación:

$$\boxed{x(t) = A\exp^{-\gamma t}\sin(\omega_a t + \alpha)}$$

donde la frecuencia de oscilación es

$$\boxed{\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

El resultado es una oscilación, con frecuencia menor que la frecuencia natural $\omega_a < \omega_0$, cuya amplitud está modulada por una envolvente decreciente. Es decir, la amplitud efectiva está amortiguada exponencialmente $A(t) = A\exp^{-\gamma t}$ (líneas de puntos en el gráfico). El resultado es válido sólo para amortiguamiento pequeño, es decir, para $\gamma < \omega_0$.



A mayor γ, más rápido será el amortiguamiento. A la inversa del coeficiente de amortiguamiento se le llama tiempo de relajación $\tau = 1/\gamma$.

Por otro lado el período de las oscilaciones es $P_a = 2\pi/\omega_a$.

Las cantidades A y α, es decir, amplitud y fase inicial, se pueden obtener si se conocen posición y velocidad iniciales x_0, v_0.

3.6 Oscilaciones forzadas y amortiguadas

En este apartado damos una vuelta de tuerca más al oscilador armónico. Si, como sucede de forma natural, hay algún tipo de amortiguamiento, pero queremos que la oscilación se mantenga, entonces necesitamos aplicar al oscilador una fuerza impulsora periódica: $F = F_0 \cos(\omega t)$

Entonces, la ecuación dinámica queda:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \underbrace{-c\frac{dx}{dt}}_{\text{Amortiguamiento}} \quad + \quad \underbrace{F_0 \cos(\omega t)}_{\text{F. externa impulsora}}$$

dividiendo por m y sustituyendo: $k/m = \omega_0^2$, $c/m = 2\gamma$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\gamma\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{3.2}$$

Es decir, tenemos una ecuación que es por un lado una mezcla de oscilación amortiguada ($\sim$ $\exp^{-\gamma t}$, a frecuencia $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, y por otro estamos forzando al sistema a oscilar con una frecuencia ω, de la fuerza impulsora. A la frecuencia de oscilación natural la llamamos ω_0.

Cuando el sistema comienza a funcionar, pasa por una fase **transitoria inicial**. El oscilador tiene una frecuencia inicial ω_a (la amortiguada). Pasado

un tiempo mucho mayor que el tiempo de amortiguamiento, $t >> \tau = 1/\gamma$, la energía que pierde el sistema (por el amortiguamiento) y la que recibe por parte de la fuerza impulsora se equilibran. Entonces se alcanza la **solución estacionaria**. La solución del sistema es del tipo:

$$\boxed{x(t) = B\cos(\omega t - \varphi)}$$

El sistema oscila con la frecuencia forzada ω. Veamos cuanto valen la amplitud B y la fase φ: En primer lugar calculamos las derivadas primera y segunda de x con respecto a t:

$$\frac{dx}{dt} = -B\omega\sin(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -B\omega^2\cos(\omega t - \varphi)$$

Sustituimos las expresiones de x, dx/dt y d^2x/dt^2 en la ecuación característica (3.2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\gamma\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \implies$$

$$-B\omega^2\cos(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 B\cos(\omega t - \varphi) - 2\gamma - B\omega\sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Recordemos dos relaciones trigonométricas:

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos(\omega t)\cos\varphi + \sin(\omega t)\sin\varphi$$

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin(\omega t)\cos\varphi - \cos(\omega t)\sin\varphi$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$B\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(\cos(\omega t)\cos\varphi + \sin(\omega t)\sin\varphi) - 2B\gamma\omega(\sin(\omega t)\cos\varphi - \cos(\omega t)\sin\varphi) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Agrupamos sacando factor común $\cos(\omega t)$ por un lado y $\sin(\omega t)$ por el otro:

$$\cos(\omega t)\left[B\cos\varphi\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2B\gamma\sin\varphi - \frac{F_0}{m}\right] + \sin(\omega t)\left[B\sin\varphi\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2B\gamma\omega\cos\varphi\right] = 0$$

Cuando el coseno sea cero, el seno no lo será, y viceversa. Para que la expresión previa se cumpla para todo t, es necesario que sean cero tanto el factor que multiplica a $\cos(\omega t)$ como el que multiplica a $\sin(\omega t)$, es decir, es necesario que sea cero lo que va dentro de los corchetes:

$$\cos(\omega t) \rightarrow \; B\cos\varphi(\omega_0^2 - \omega^2) + 2B\gamma\omega\sin\varphi - \frac{F_0}{m} = 0 \implies$$

$$B = \frac{F_0/m}{\cos\varphi(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega\sin\varphi} \tag{3.3}$$

$$\sin(\omega t) \rightarrow \; B\sin\varphi\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2B\gamma\omega\cos\varphi = 0 \implies$$

$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{3.4}$$

Ya tenemos el ángulo φ. Ahora la amplitud, pero antes recordamos otras dos relaciones trigonométricas:

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$$

como hemos calculado la tangente, sustituimos y así tendremos el coseno y el seno despejados:

$$\sin\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma\omega^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma\omega^2}}$$

y por lo tanto, introduciendo estos valores en la ecuación (3.3), tenemos que:

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

en resumen, tenemos un oscilador que, en estado estacionario, tiene frecuencia ω (que es la frecuencia a la que le forzamos a trabajar mediante la aplicación de una fuerza externa), fase φ y amplitud B:

$$\boxed{B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}} \tag{3.5}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}} \tag{3.6}$$

Observar que ahora la amplitud y fase alcanzadas en el estado estacionario no dependen de las condiciones iniciales, sino que dependen de las características propias de la partícula oscilante (su masa m), la componente amortiguadora (ω_0, γ) y la fuerza externa impulsora (F_0, ω).

Es interesante estudiar como cambian φ y sobre todo B con la frecuencia forzada ω.

$$B(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

- si $\omega = 0$, entonces $B = B_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = F_0/k$.
- si $\omega \to \infty$, entonces $B \to 0$. No hay oscilación.
- existe un valor de ω en el que la amplitud es máxima.
  - Máximo local en ω tal que $dB/d\omega = 0$

$$\frac{dB}{d\omega} = \frac{F_0}{m}\frac{-1}{2}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{-3/2}\left[2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+8\gamma^2\omega\right]$$

$$\frac{dB}{d\omega} = 0 \Leftrightarrow -4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\gamma^2\omega = 0 \implies \begin{cases} \omega = 0 \\ -(\omega_0^2-\omega^2)+2\gamma^2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$$

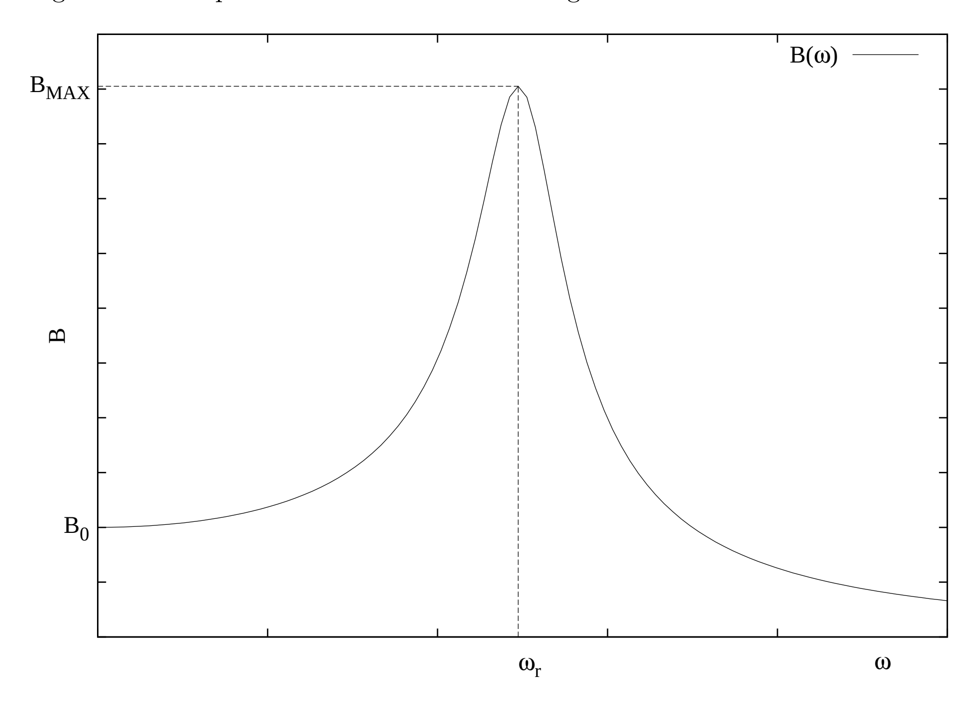
es la llamada frecuencia de resonancia, aquella para la que la amplitud conseguida es máxima. Si estimulamos el sistema con una fuerza que tenga esa frecuencia, la amplitud obtenida será:

$$B_{\max} = B(\omega_r) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_r^2)^2+4\gamma^2\omega_r^2}} = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$$

si recordamos, $F_0/m = B_0\omega_0^2$. Por otro lado $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$. Entonces la expresión se puede transformar para que quede así:

$$\boxed{B_{\max} = B_0\frac{\omega_0^2}{2\gamma\omega_a}}$$

Y gráficamente queda como se muestra en la figura:



3.6.1 Resonancia

Cuando se entra en resonancia se producen oscilaciones de gran amplitud, mucho mayores que la amplitud asociada a la fuerza externa, $F_0 = kB_0$.

Obsérvese que las amplitudes máximas se obtienen cuando se trabaja con coeficientes de amortiguamiento muy bajos en comparación con la frecuencia natural ω_0:

$$B_{\max} = B_0 \frac{\omega_0^2}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \gg B_0 \Leftrightarrow \gamma \ll \omega_0$$

El hecho de escoger valores pequeños de γ tiene algunas implicaciones. En concreto, la frecuencia de resonancia se acerca mucho a la natural:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \simeq \omega_0$$

lo mismo sucede con la frecuencia de oscilación amortiguada:

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \simeq \omega_0$$

entonces, la amplitud máxima queda así:

$$B_{\max} = B_0 \frac{\omega_0^2}{2\gamma\omega_a} \simeq B_0 \frac{\omega_0}{2\gamma} \equiv B_0 Q$$

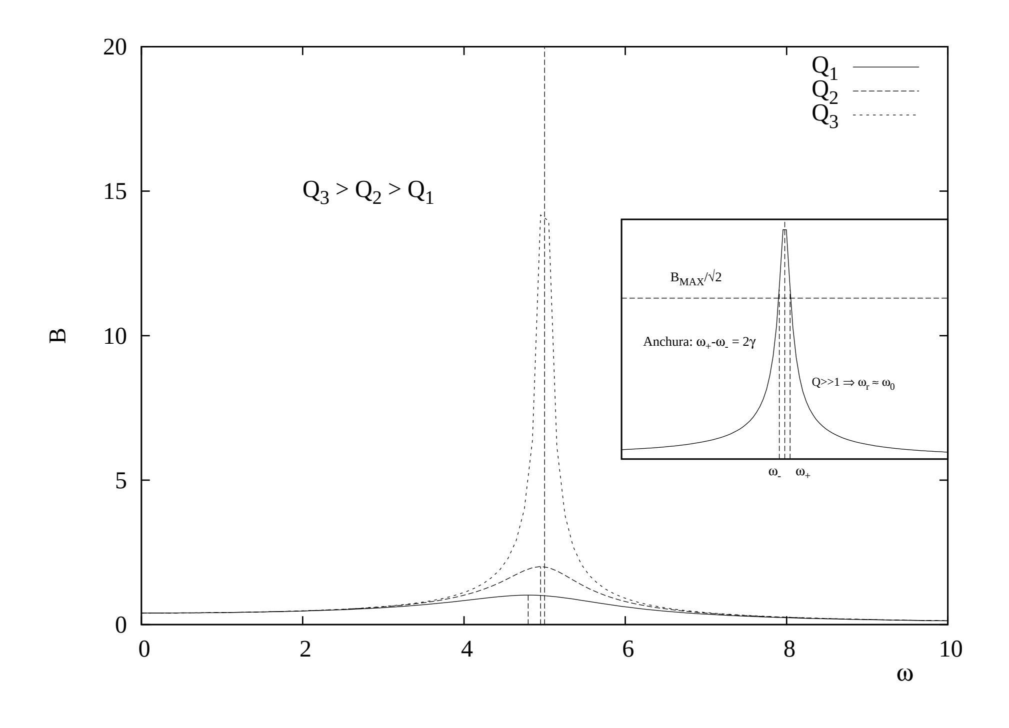
donde hemos definido el *factor de calidad* $Q = \omega_0/2\gamma$. Cuando se entra en resonancia con $\gamma \ll \omega_0$, se tienen valores $Q \gg 1$ y por lo tanto $B_{\max} \gg B_0$. Además la frecuencia a la que oscila el sistema es muy próxima a la frecuencia de oscilación natural del armónico: $\omega_r \simeq \omega_0$.

La intensidad de la resonancia se asocia por tanto con la altura del pico. La curva de resonancia también queda caracterizada por la anchura del pico. Se suele tomar como referencia para calcular dicha anchura a las frecuencias a las que la altura es $B_{\max}/\sqrt{2}$, frecuencias angulares que denotamos como ω_- y ω_+. Las frecuencias $\omega_\pm$ son las soluciones de la ecuación de segundo grado que se obtiene al igualar la ecuación 3.5 a la amplitud deseada, en este caso $B_{\max}/\sqrt{2}$, es decir:

$$B(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = \frac{B_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Se obtiene una ecuación cuadrática cuya solución es, para $\gamma \ll \omega_0$,

$$\omega(B = B_{\max}/\sqrt{2}) = \omega_0 \pm \gamma \begin{Bmatrix} \omega_- = \omega_0 - \gamma \\ \omega_+ = \omega_0 + \gamma \end{Bmatrix} \Longrightarrow \Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = 2\gamma$$

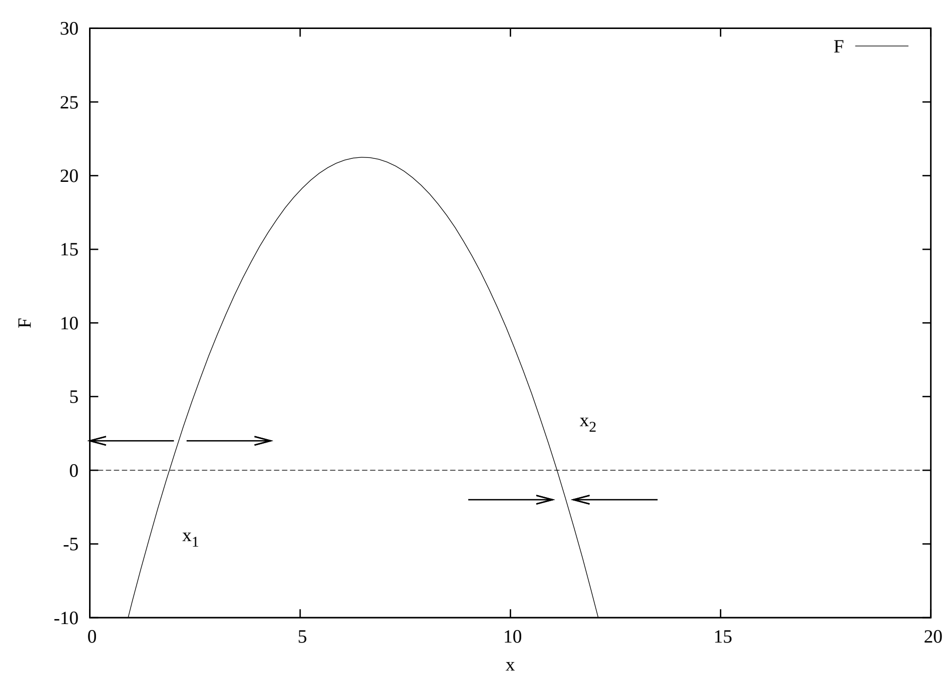


3.7 Oscilaciones Anarmónicas

En las oscilaciones armónicas veíamos oscilaciones en torno a un punto donde la fuerza es cero (el punto de equilibrio $x_{\rm eq}$), y una dinámica tal que la fuerza es proporcional al desplazamiento con respecto a dicho equilibrio: $F \propto -(x - x_{\rm eq})$ (ver gráfico derecho de la página 3).

En un caso más general la fuerza no es lineal con el desplazamiento. Entonces no se obtiene una oscilación armónica en general, aunque es posible que, en torno a un punto de equilibrio, el sistema si que oscile. Un punto de equilibrio es cualquier punto x_i donde $F(x_i) = 0$. Pero para que haya oscilaciones dicho equilibrio debe ser *estable*.

Por ejemplo, en el gráfico siguiente, tenemos dos puntos de equilibrio, x_1 y x_2, porque en ambos la fuerza es cero. Pero sólo el segundo es estable, porque si desplazamos una partícula desde x_2 en cualquier dirección, la fuerza será hacia x_2. Y por lo tanto habrá algún tipo de oscilación en torno a dicho equilibrio. Pero si una partícula la tenemos en x_1, en reposo, y la desplazamos ligeramente, la fuerza será para alejar a la partícula de x_1.



La diferencia entre ambos casos es que en torno a x_2 la derivada $\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_2} < 0$ (pendiente positiva), mientras que en torno a x_1 sucede lo contrario: $\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_1} > 0$ (pendiente negativa).

Veamos ahora qué sucede si en torno a un punto de equilibrio realizamos un pequeño desplazamiento Δx.

En torno a x_1 ya sabemos que no habrá oscilación. En torno a x_2 si que la habrá, pero como la fuerza no es lineal con el desplazamiento, no será una oscilación armónica. ¿Cuánto vale la fuerza en el punto $x = x_2 + \Delta x$?

Desarrollo en serie de la fuerza $F(x)$ en torno a un punto x_2.

$$F(x_2 + \Delta x) = \underbrace{F(x_2)}_{=0} + \frac{1}{1!}\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_2} \Delta x + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x_2} \Delta x^2 + \frac{1}{3!}\dots$$

entonces, si el desplazamiento Δx es muy pequeño $\Delta x \ll 1$, se cumple que nos podemos quitar los términos Δx^2, Δx^3, etc, porque son mucho más pequeños que Δx: $\Delta x \ll 1 \implies \Delta x \gg \Delta x^2 \gg \Delta x^3 \gg \dots$. Por lo tanto, en primer orden de aproximación, tenemos que:

$$F(x_2 + \Delta x) \sim \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_2} \Delta x = -k\Delta x$$

como la derivada evaluada en x_2 es una constante negativa, tenemos que la fuerza es lineal con el desplazamiento Δx.

En resumen, cuando la fuerza F no es lineal podemos tener oscilaciones aproximadamente armónicas si:

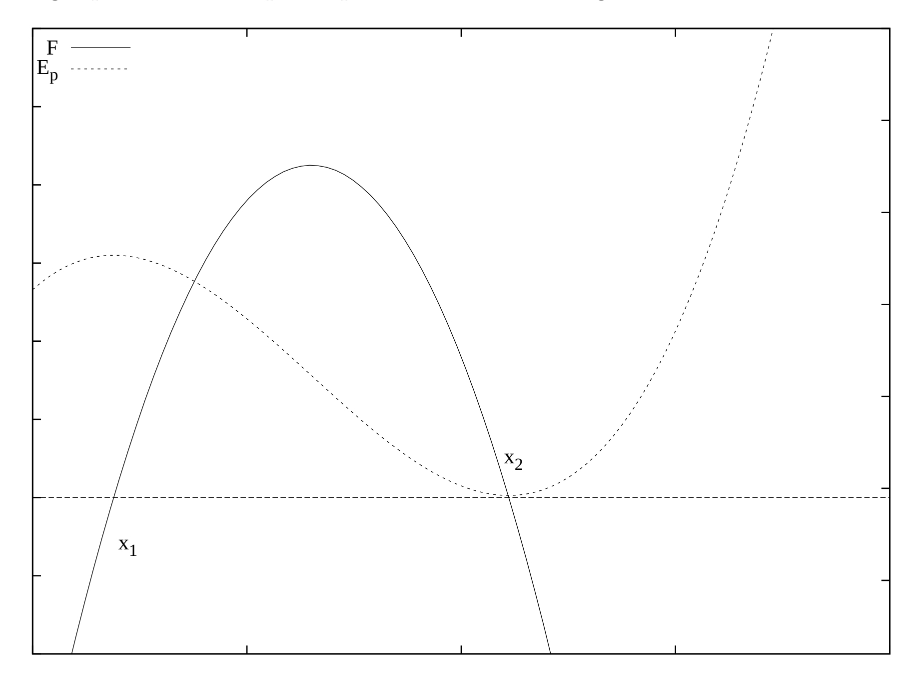
- se producen en torno a una posición de equilibrio estable
- son el resultado de una pequeña perturbación con respecto al equilibrio

además, la constante recuperadora es la derivada de la fuerza evaluada en dicho punto de equilibrio estable.

Podemos analizar también este tipo de oscilaciones en términos de energía potencial E_p, en lugar de fuerza. Recordando la definición de energía potencial en fuerzas conservativas, tenemos que, si el sistema es unidimensional:

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dt}\vec{i}$$

Siguiendo el caso de la fuerza representada en el gráfico anterior, tendríamos una energía potencial del tipo al que se muestra en la figura:



Obsérvese que los máximos y mínimos relativos de la función $E_p(x)$ coinciden con los puntos donde la fuerza es cero.

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } x = x_1 \\ \text{si } x = x_2\end{array}\right\} \Longrightarrow F = -\frac{dE_p}{dx} = 0 \Longrightarrow \text{ equilibrio} \left\{\begin{array}{c}\text{inestable } (E_p(x_1)\,\text{max}) \\ \text{estable } (E_p(x_2)\,\text{min})\end{array}\right.$$

La diferencia es que mientras que en uno de los puntos de equilibrio, la energía potencial es un máximo relativo, en el otro ésta es un mínimo relativo. Si tenemos un máximo relativo (o local) de energía potencial, tenemos un equilibrio inestable, y si estamos en un mínimo relativo (o local) de la función $E_p(x)$ entonces tenemos un punto de equilibrio estable, en torno al cual puede haber oscilaciones.

Desde el punto de vista de la energía potencial, para que dichas oscilaciones sean armónicas, la función $E_p(x)$ ha de ser una parábola del tipo

$$E_p = (1/2)k(x - x_{\text{eq}})^2 \tag{3.7}$$

En general esto no se produce, y en el caso de la gráfica tampoco.

Veramos qué sucede con la energía potencial si realizamos un pequeño desplazamiento Δx desde la posición de equilibrio estable x_2. Observar en la figura

que la referencia para la energía potencial se ha escogido como $x_{\rm ref} = x_2$, de modo que $E_p(x_2) = E_p(x_{\rm ref}) = 0$.

El desarrollo en serir de $E_p(x)$ en torno al punto x_2 es:

$$E_p(x_2+\Delta x) = \underbrace{E_p(x_2)}_{=0} + \frac{1}{1!}\underbrace{\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x_2}}_{=0}\Delta x + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x_2}\Delta x^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3E_p}{dx^3}\right|_{x_2}\Delta x^3 + \frac{1}{4!}\ldots$$

Obsérvese que los dos primeros términos desaparecen (en x_2 la energía potencial es cero, por ser la referencia escogida, y la primera derivada también lo es, puesto que se trata de un mínimo relativo). El primer término no nulo del desarrollo es el que va con Δx^2. Si además suponemos el desplazamiento muy pequeño ($\Delta x \ll 1$) entonces nos podemos quedar con el primer término no nulo del desarrollo, porque $\Delta x^2 \gg \Delta x^3 \gg \Delta x^4 \ldots$. Entonces, podemos dar por buena la aproximación:

$$E_p(x+\Delta x) \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_2}\Delta x^2$$

Con lo cual, identificamos la derivada segunda *evaluada* en el punto de equilibrio como la constante recuperadora k en la ecuación 3.7. Por tanto, la frecuencia es $\omega^2 = k/m \implies$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{(d^2E_p/dx^2)_{x_{\rm eq}}}{m}}}$$

3.8 Superposición de armónicos

¿Qué sucede cuando dos oscilaciones armónicas se superponen? ¿Cuál es el resultado? Depende de cómo sean las superpuestas:

3.8.1 Superposición de armónicos de igual frecuencia

Tenemos dos armónicos de amplitudes y fases distintas, pero igual ω. El resultado de la superposición es otra oscilación armónica, con esa misma frecuencia:

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) = A_1\sin(\omega t+\alpha_1) \\ x_2(t) = A_2\sin(\omega t+\alpha_2)\end{aligned}\right\} \implies x(t) = x_1(t)+x_2(t) = A\sin(\omega t+\alpha)$$

Veamos cuál es la amplitud resultante A, y la fase α.

Utilizamos la relación trigonométrica de seno de la suma: $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$.

$$x = A\sin(\omega t+\alpha) = A\left(\sin\omega t\cos\alpha + \sin\alpha\cos\omega t\right) \tag{3.8}$$

por otro lado:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\sin(\omega t+\alpha_1) + A_2\sin(\omega t+\alpha_2) \implies$$

$$x = A_1\left(\sin\omega t\cos\alpha_1 + \sin\alpha_1\cos\omega t\right) + A_2\left(\sin\omega t\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\omega t\right) \tag{3.9}$$

Igualamos las ecuaciones (3.8) y (3.9), y sacamos por un lado factor común $\sin \omega t$ y por otro factor común $\cos \omega t$, es decir:

$$\sin \omega t \,(A \cos \alpha) + \cos \omega t \,(A \sin \alpha) =$$

$$\sin \omega t \,(A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) + \cos \omega t \,(A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)$$

A continuación igualamos, por separado, la parte proporcional al seno y la parte proporcional al coseno.

$$\cos \omega t \implies A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 \tag{3.10}$$

$$\sin \omega t \implies A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 \tag{3.11}$$

dividiendo la ecuación (3.10) entre la ecuación (3.11):

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}}$$

elevando al cuadrado las ecuaciones (3.10) y (3.11) y después sumándolas, se obtiene:

$$A^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = A_1^2 \sin^2 \alpha_1 + A_2^2 \sin^2 \alpha_2 + 2A_1A_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 +$$

$$+A_1^2 \cos^2 \alpha_1 + A_2^2 \cos^2 \alpha_2 + 2A_1A_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \implies$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) \implies$$

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2a_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

Es interesante observar que la amplitud dependerá de la diferencia de fase entre las dos oscilaciones superpuestas. Si están en fase ($\alpha_1 = \alpha_2$), entonces la amplitud es la suma $A = A_1 + A_2$, mientras que si están en contrafase ($\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$), entonces la amplitud es la resta $A = A_1 - A_2$.

3.8.2 Superposición de armónicos de igual amplitud y fase, pero distinta ω

Ahora vamos a estudiar un caso disinto: tenemos dos ondas de igual amplitud pero frecuencias distintas. La fase inicial la ponemos a cero por simplicidad.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = A \sin \omega_1 t \\ x_2 = A \sin \omega_2 t \end{array}\right\} x = x_1 + x_2 = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t)$$

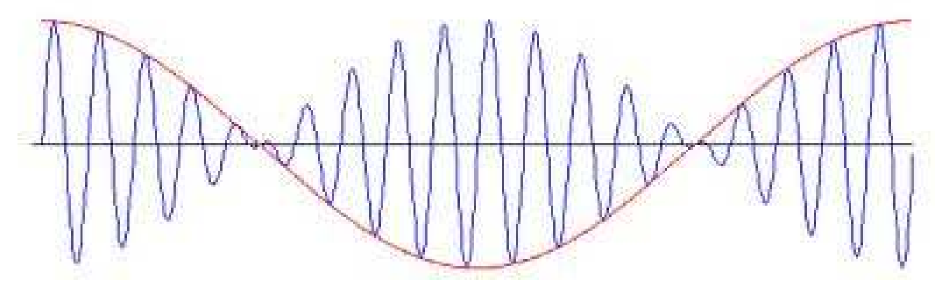
ahora echamos mano de la identidad trigonométrica:

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) \cos \left(\frac{\theta - \phi}{2}\right)$$

esto nos permite escribir la ecuación previa así:

$$x = A(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Esta ecuación la podemos interpretar como una oscilación a frecuencia $(\omega_1 + \omega_2)/2$, (que es la frecuencia promedio) pero con una amplitud modulada, $A = 2A\cos[(\omega_1 - \omega_2)t/2]$.



La amplitud thene unos valores que van desde 0 hasta $2A$. El periodo de la modulación de la amplitud es $2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$.

Se puede demostrar que si las amplitudes de las dos oscilaciones superpuestas son distintas, $A_1 \neq A_2$, entonces la amplitud toma valores en el intervalo $A_1 - A_2 \leq A \leq A_1 + A_2$.

Cuando las dos oscilaciones superpuestas están en fase, entonces $A = A_1 + A_2 \rightarrow \omega_1 t = \omega_2 t + 2n\pi$, con n número natural.

Cuando las oscilaciones están en contrafase: $A = A_1 - A_2$, es decir: $\omega_1 t = \omega_2 t + (2n - 1)\pi$.

Chapter 4

Sólido Rígido

4.1 Introducción

En este capítulo nos ocuparemos de la dinámica del sólido rígido, entendiendo como tal un sólido indeformable. Es decir, la distancia relativa entre las partículas que lo componen se puede considerar constante.

El movimiento en general es una combinación de los dos tipos de movimiento simple: traslación y rotación.

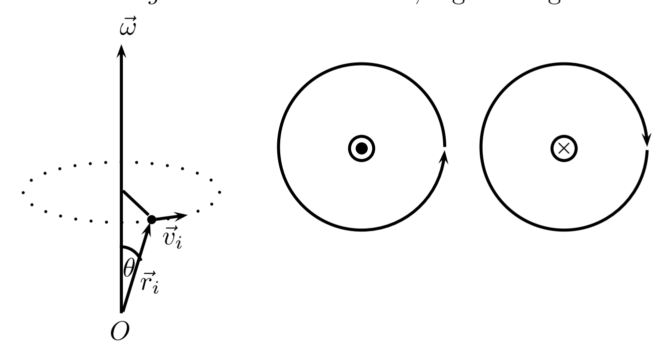
Para la traslación, podemos tratarlo teniendo en cuenta que, como vimos en los sistemas de partículas, su dinámica sería la de una partícula ubicada en el centro de masas.

Sin embargo, si el sólido rígido rota en torno a un eje fijo, debemos introducir un nuevo elemento, el **momento de inercia** I.

4.2 Rotación en torno a un eje fijo y momento de inercia

4.2.1 Convenio de sentido de rotación

Cuando un sólido rígido (o una partícula) rota con velocidad angular ω en torno a un eje, por ejemplo el OZ, existe un convenio según el cual se representa el vector $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, paralelo al eje de rotación. El sentido de rotación se deduce utilizando la *regla de la mano derecha*, según la figura de a continuación:



donde el símbolo $\odot$ representa una flecha saliendo del plano donde está dibujado, apuntando hacia el lector, mientras que el símbolo $\otimes$ tiene la misma dirección pero sentido opuesto.

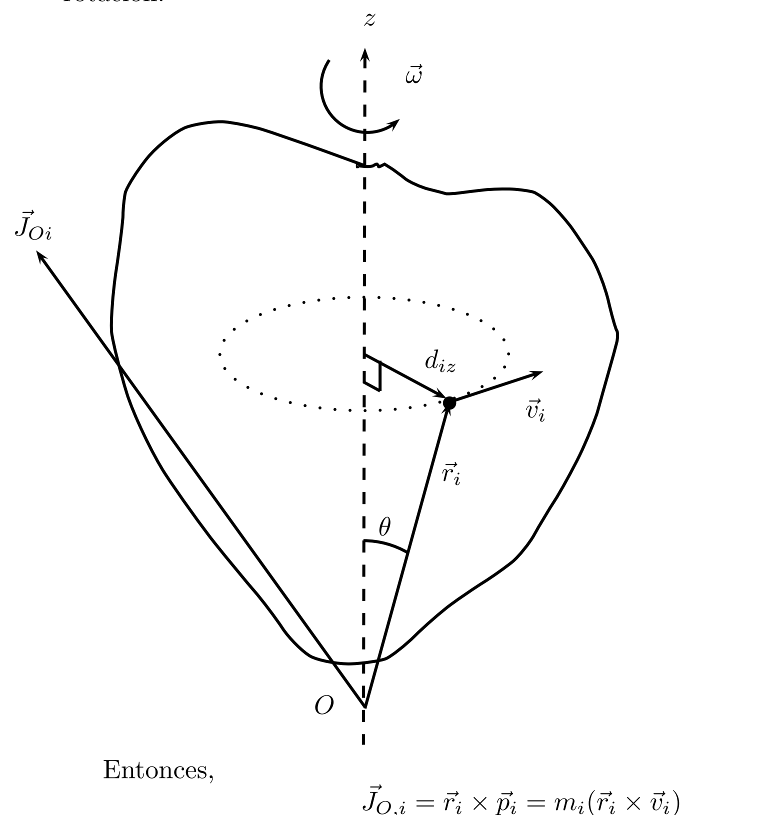
Si escogemos un origen para el vector $\vec{r}_i$ en el mismo eje, podemos escribir la velocidad de la partícula i como el producto vectorial:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \tag{4.1}$$

Pensemos que $|\vec{r}_i| \sin\theta$ es el radio de la circunferencia que describe la partícula i, mientras que la velocidad $\vec{v}_i$ es al mismo tiempo perpendicular a $\vec{r}_i$ y a $\vec{\omega}$. Todo tiene sentido pues.

4.2.2 Momento angular de un sólido rígido en rotación

Supongamos ahora que queremos averiguar el momento angular de una partícula de un sólido rígido que está rotando con velocidad angular $\vec{\omega} \parallel OZ$, como se muestra en la figura. El origen de coordenadas O está ubicado en el eje de rotación.



Entonces,

$$\vec{J}_{O,i} = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \tag{4.2}$$

mientras que el momento angular total del sólido (que está compuesto por n partículas) sería:

$$\vec{J}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{J}_{O,i} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

[Recordar: $\vec{J}_{O,i}$ es el momento angular de la partícula i (que forma parte del sólido rígido) con respecto al origen de coordenadas O. En cambio $\vec{J}_O$ es

el momento angular de todo el sólido rígido, es decir, la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas, desde $i = 1$ hasta $i = n$]

La proyección de $\vec{J}_{O,i}$ sobre el eje de rotación, que es el OZ, es:

$$\left(\vec{J}_{O,i}\right)_z = \vec{J}_{O,i} \cdot \vec{k}$$

Análogamente sucede con el momento angular total:

$$\left(\vec{J}_{O}\right)_z = \vec{J}_{O} \cdot \vec{k}$$

Esta última expresión la podemos desarrollar:

$$\left(\vec{J}_{O}\right)_z = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{J}_{O,i}\right)_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{k} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{k} \times \vec{r}_i)$$

donde se ha utilizado para dar el último paso una propiedad de los productos escalar y vectorial: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$.

Llegados a este punto podemos utilizar la expresión (4.1) para sustituir $\vec{v}_i$ en la última ecuación:

$$\left(\vec{J}_{O}\right)_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{k} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{k} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega (\vec{k} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{k} \times \vec{r}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \omega |\vec{k} \times \vec{r}_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega (r_i \sin\theta_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i d_{iz}^2\right) \omega$$

donde $d_{iz} = r_i \sin\theta_i$ es la distancia de la partícula i al eje de rotación.

4.2.3 Momento de Inercia

En resumen, vemos que tras unas pocas operaciones algebraicas podemos deducir que la proyección, sobre el eje de rotación, del momento angular es proporcional a la frecuencia ω y a una cantidad (entre paréntesis en la última expresión) que sólo depende de la estructura interna del sólido rígido. A esta cantidad la denominamos momento de inercia y la denotamos con la letra I.

$$\boxed{I_z = \sum_{i=1}^{n} d_{iz}^2 m_i}$$

$$\boxed{\left(\vec{J}_{O}\right)_z = I_z \omega}$$

Observar que el momento de inercia depende del eje en torno al que gire el sólido.

Si el sólido es contínuo, es decir, es inviable realizar un sumatorio sobre todas sus partículas, entonces el momento de inercia se ha de calcular realizando una integral sobre todo el volumen del sólido.

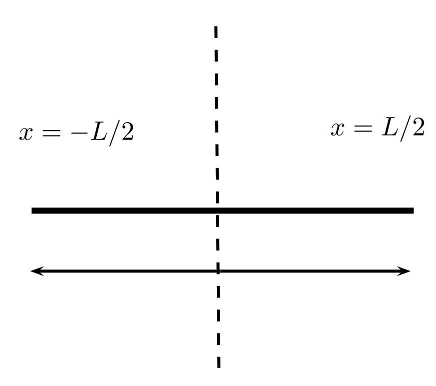
$$\text{si } n \to \infty \implies \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 \to \int_{Vol} dm D^2$$

donde la integral se realiza sobre todos los elementos diferenciales de masa dm que conforman el sólido, siendo D^2 el cuadrado de la distancia de cada uno de estos elementos al eje de rotación.

En general no se puede escribir $\vec{J}_O = I\vec{\omega}$, porque el momento angular y el eje apuntan en direcciones distintas. Existen algunos ejes de rotación, que son ejes de simetría del sólido que está girando, tales que se cumple que $\vec{J} = I_Z\vec{\omega}$. Dichos ejes también se suelen llamar ejes principales de inercia.

Si queremos calcular el momento de inercia de un objeto bidimensional (por ejemplo un disco) la integral pasa de ser de volumen a ser una integral de superficie, mientras que si el objeto es lineal (por ejemplo una varilla) entonces la integral es una integral de línea.

4.2.4 Momento de inercia de una varilla



Una varilla de sección despreciable, homogénea, de longitud L y masa M rotando en torno a su centro de masas:

Antes de nada, la definición de momento de inercia,

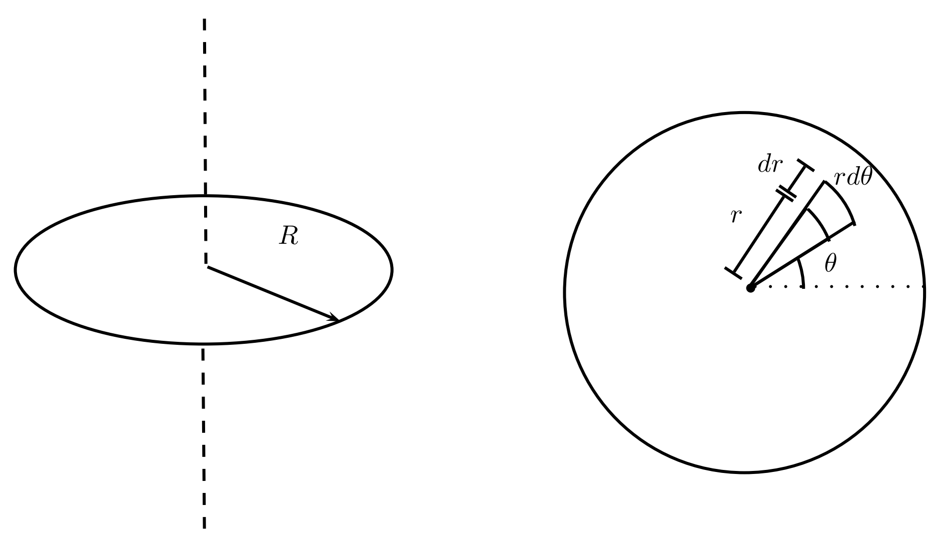
$$I = \int_L dm D^2$$

cada elemento dm, ¿qué masa tiene? Los elementos infinitesimales de masa dm tienen todos la misma longitud, dx.

Mediante una sencilla regla de tres (puesto que la varilla es homogénea) vemos que $dm = M dx/L$. Vemos que estamos pasando de hacer una integral en la variable masa m a hacerla en la variable espacial x. Colocamos el origen de coordenadas en la intersección del eje con la varilla. La distancia de cada punto dm al eje es precisamente x. Finalmente quedan por definir los límites de integración: en nuestro caso la x va desde $-L/2$ hasta $+L/2$. Con lo cual:

$$I = \int_L dm D^2 = \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{M}{L} x^2 = \frac{M}{L}\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{ML^2}{12}$$

4.2.5 Momento de inercia de un disco



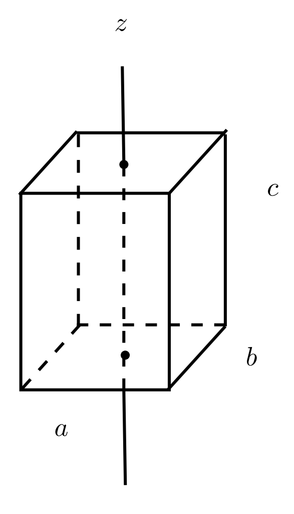
Un disco plano, homogéneo, de masa M y radio R, rotando en torno a un eje que pasa por su centro de masas, y que es perpendicular al propio disco.

Aquí tenemos un objeto bidimensional, con lo que la integral debe hacerse sobre una superficie. Lo más sencillo es utilizar coordenadas polares, y pasar de (x, y) a (r, θ), coordenadas que ya conocemos. La superficie total es πR^2. Un elemento diferencial de superficie es, en polares (ver dibujo) $rdrd\theta$, y tendrá una masa: $dm = rdrd\theta M/\pi R^2$. La distancia D^2 es precisamente r^2, y ahora las varaibles de integración son dos, r, θ. Sus límites de integración son $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces la integral del momento de inercia queda:

$$I_z = \int_{Sup} dmD^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(r\frac{M}{\pi R^2} r^2 \right) dr = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{R^4}{4} = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

4.2.6 Momento de inercia de un paralelepípedo



Un bloque paralelepípedo, homogéneo, de masa M y dimensiones $a - b - c$, rotando en torno al eje que pasa por su centro de masas, y que está orientado en la dirección OZ.

En esta ocasión tenemos un objeto tridimensional, la integral ha de hacerse sobre un volumen y por tanto en tres variables. En este caso las cordenadas cartesianas (x, y, z) son las más útiles. El volumen es $V = abc$, y la densidad $\rho = M/V = M/abc$. Un elemento diferencial de volumen sería $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Y la masa del mismo es: $dm = \rho dV = M dxdydz/abc$. La distancia de cada punto (x, y, z) al eje de rotación es $D^2 = x^2 + y^2$. Finalmente, los límites de integración son, si situamos el origen de cordenadas en el centro de la base: $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$ y $0 \leq z \leq c$. La integral del momento de inercia nos queda así:

$$I_z = \int_{Vol} dmD^2 = \int_0^c dz \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dx \frac{M}{abc}(x^2 + y^2) =$$

$$= \frac{M}{abc} \int_0^c dz \int_{-b/2}^{b/2} dy \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right)_{x=-a/2}^{x=a/2} = \frac{M}{abc} \int_0^c dz \int_{-b/2}^{b/2} dy \left(\frac{a^3}{12} + ay^2 \right) =$$

$$= \frac{M}{abc} \int_0^c dz \left(\frac{a^3 y}{12} + \frac{ay^3}{3} \right)_{y=-b/2}^{y=b/2} = \frac{M}{abc} \int_0^c dz \left(\frac{a^3 b}{12} + \frac{ab^3}{12} \right) =$$

$$= \frac{M}{abc} \frac{cab}{12} \left(a^2 + b^2 \right) = \frac{M}{12} \left(a^2 + b^2 \right)$$

4.2.7 Teorema de Steiner

Sea I_z^* el momento de inercia de un sólido de masa M cuando rota en torno a un eje z que pasa por su centro de masas. ¿Qué sucede con el momento de inercia (I_z^o) si rota en torno a un eje paralelo al mismo pero que no pasa por el centro de masas sino a una distancia D_z del mismo?

Según el teorema de Steiner, el momento de inercia cuando se gira en torno al nuevo eje es:

$$\boxed{I_z^o = I_z^* + MD_z^2}$$

4.2.8 Ecuación del movimiento

Si tenemos un sistema de n partículas, el momento angular $\vec{J}_O$ varía según la ecuación:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \vec{N}_O = \sum_i^n \vec{N}_{Oi}^{\text{ext}}$$

como vimos en el tema II. Por otra parte la componente OZ de la ecuación anterior es:

$$\left(\frac{d\vec{J}_O}{dt} \right)_Z = \left(\vec{N}_O \right)_Z \implies \text{notación} \implies$$

$$\frac{dJ_Z}{dt} = N_Z \qquad (4.3)$$

Por otra parte, en este tema hemos visto que para un sólido rígido rotando con frecuencia $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ en torno a un eje fijo, la proyección del momento angular sobre el eje es:

$$\left(\vec{J}_O\right)_Z = J_z = I_z\omega \implies$$

$$\frac{d\vec{J}_z}{dt} = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\alpha \tag{4.4}$$

Combinando las ecuaciones (4.3) y (4.4) obtenemos una ecuación del movimiento:

$$\boxed{N_z = I_z\alpha = I_z\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

Esta ecuación es el equivalente a la segunda ley de Newton para rotación de sólidos rígidos. A partir de la misma podemos deducir $\omega(t)$ y $\theta(t)$.

Cuando el eje de rotación es uno de los ejes inerciales principales, y pasa por el centro de masas, se escribe con un superíndice $*$ (J^*, I^*). Reescribimos la ecuación con que hemos dado comienzo a esta sección:

$$\frac{d\vec{J}^*}{dt} = \vec{N}^*$$

Como estamos rotando en torno a un eje principal, se cumple que

$$\vec{J}^* = I^*\vec{\omega}$$

Entonces, combinando estas dos ecuaciones y siguiendo un proceso análogo al anterior, deducimos la siguiente ecuación del movimiento:

$$\boxed{\vec{N}^* = I\vec{\alpha}}$$

Esta ecuación es válida sólo cuando se rota en torno a un eje principal de inercia.

4.3 Energía Cinética de rotación

La energía cinética de un sólido compuesto de n partículas, cada una de ellas con masa m_i y velocidad $\vec{v}_i$, es:

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_i^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i^n m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i^n m_i\vec{v}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$$

puesto que consideramos que el sólido está rotando con frecuencia $\vec{\omega}$. Recordemos ahora la propiedad del producto escalar de un vector por el producto vectorial de otros dos: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$. Entonces, retomando la última ecuación:

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)$$

como $\vec{\omega}$ es igual para todos los puntos i, puede salir del sumatorio:

$$E_C = \frac{1}{2}\left\{\sum_i m_i(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)\right\}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{J}\cdot\vec{\omega}$$

Por tanto en un sólido rígido rotando con $\vec{\omega}$, la energía cinética de rotación es:

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{J} \cdot \vec{\omega}$$

mientras que si tenemos rotación plana, $\vec{J} = I\vec{\omega}$, y por tanto, sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

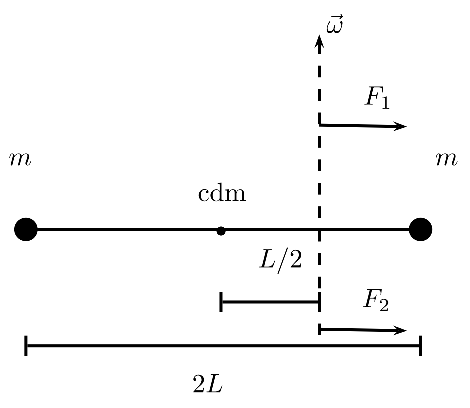
4.4 Fuerzas de Ligadura

Existen diversas situaciones en las que para mantener en el tiempo una rotación de un sólido rígido en torno a un eje fijo es necesario aplicar "fuerzas de ligadura".

4.4.1 Caso I: Centro de masas no contenido en el eje de rotación

Si el eje de rotación no pasa por el centro de masas R_{cdm}, entonces éste está rotando, y por lo tanto su aceleración no es cero.

Ejemplo: Sólido rígido constituido por dos partículas de masa m situadas a distancia $2L$. El eje de rotación es perpendicular a la línea que las une, pero no pasa por el centro de masas, sino que queda a una distancia $L/2$ del mismo.



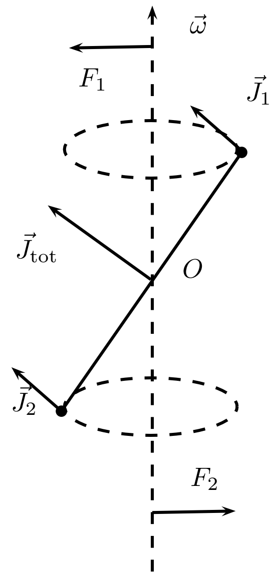
El centro de masas, por tanto, está describiendo un movimiento circular de radio $L/2$. El movimiento del cdm es el equivalente al de una partícula de masa $M = 2m$ que describe esa circunferencia, y su aceleración (ver final del tema 1) es $A = \omega^2 L/2$. Por tanto, para mantener la rotación es necesario aplicar en el eje dos fuerzas de ligadura (F_1 y F_2) tales que $F_1 + F_2 = 2m\omega^2 L/2 = m\omega^2 L$, pero que al mismo tiempo no aporten momento.

En definitiva, cuando el eje de rotación no pasa por el centro de masas, es necesario que actúen fuerzas externas para compensar la aceleración del centro de masas y que el eje de rotación se mantenga fijo.

4.4.2 Caso II: El eje de rotación no es un eje principal de inercia

Si el eje de rotación pasa por el centro de masas pero no es un eje principal de inercia entonces suceden dos cosas: En primer lugar la aceleración del centro de masas es nula, puesto que el cdm está fijo, y por el otro lado no se conserva el momento angular. Para preservar el giro, han de actuar una serie de fuerzas externas que hagan que se cumpla la ecuación de conservación del momento angular.

Veamos un ejemplo utilizando el mismo sólido que en el caso I.



El centro de masas (O) no sufre movimiento de traslacion alguno, con lo que su aceleración es cero, y por tanto no es necesario actúen fuerzas externas desde este punto de vista: $\vec{A}_{\text{cdm}} = 0 \rightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$.

Por otro lado el momento angular no se conserva (vemos que su dirección irá cambiando conforme vayan rotando las partículas de masa m que constituyen el sólido rígido). De hecho, para el observador situado en O, tenemos que $\vec{J}_O$ describe un movimiento circular, y por tanto:

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{J}_O \neq 0$$

Para que se mantenga la rotación del sólido rígido es necesario que actúe una serie de fuerzas externas tales que la mantengan. Es decir, se han de introducir dos fuerzas externas de ligadura, F_1 y F_2 actuando sobre el eje, tales que el momento de las mismas cumpla la ecuación de conservación del momento angular:

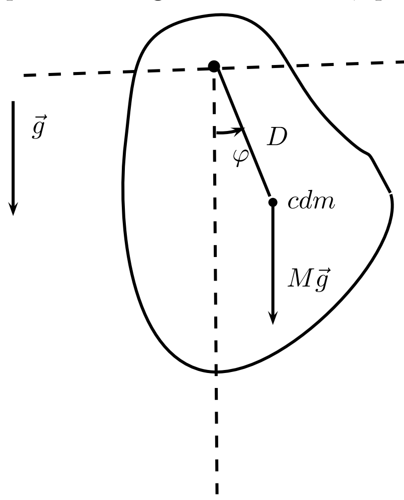
$$\vec{N}_{\text{ext}} = \vec{N}_{F_1} + \vec{N}_{F_2} = \frac{d\vec{J}_O}{dt}$$

Pero al mismo tiempo, dichas fuerzas deben ser tales que $F_1 + F_2 = 0$ para que la suma de fuerzas externas no ocasione un movimiento de traslación del cdm.

4.5 Ejemplos

4.5.1 El péndulo físico

Anteriormente se estudió el péndulo ideal. Se trata de una idealización porque, entre otras cosas, se consdiera que la masa que oscila es puntual. En esta ocasión vamos a sustituirla por un péndulo más realista, con masa M pero también con un volumen finito que, además, puede ser irregular. El péndulo físico es un sistema que tiene un grado de libertad, que le permite rotar en torno a un eje.



Supongamos que el sólido de la figura tiene momento de inercia I para el eje de rotación escogido. El punto fijo de rotación dista D del centro de masas (cdm).

Por un lado tenemos la ecuación del movimiento:

$$I\alpha = N$$

¿Cuál es el momento $\vec{N}$ de la fuerza? En primer lugar, esa fuerza es el peso, como consecuencia del campo gravitatorio, y se aplica al centro de masas. El momento se define como el producto vectorial $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$. El vector $\vec{r}$ es el que va desde el origen escogido (en este caso el eje de rotación) hasta el punto donde la fuerza se aplica, es decir, es un vector de módulo D en nuestro diagrama. Entonces:

$$N = -MgD \sin\theta$$

donde el signo negativo indica que la fuerza es recuperadora, en sentido opuesto a las variaciones angulares.

Existiría otra fuerza, la fuerza de ligadura ejercida en el eje de rotación. Sin embargo el momento de esta fuerza es nulo, porque su distancia al origen es 0.

Por otro lado tenemos la ecuación del movimiento:

$$N = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce que:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -MgD \sin\theta$$

Cuando el ángulo es pequeño, se puede aproximar por su seno:

$$\theta \ll 1 \implies \sin\theta \simeq \theta$$

Por tanto, la ecuación del péndulo físico para pequeños ángulos es:

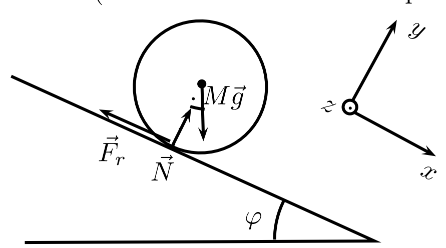
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{MgD}{I}\theta$$

Es decir, para pequeños ángulos, el péndulo físico oscila armónicamente, con frecuencia $\omega^2 = MgD/I$, y un periodo $T = 2\pi\sqrt{I/MgD}$.

4.5.2 Rodaduras sin deslizamiento

La ecuación del movimiento de sólidos rígidos también nos permite resolver otros problemas complejos en los que intervengan sólidos rígidos rodando. Un ejemplo es el de una esfera que, rodando, desciende por un plano inclinado. La esfera tiene masa M y radio R. Como está rodando (y no desliza) está actuando en el punto de contacto con el plano una fuerza de rozamiento, dirigida contra el sentido de avance. Por otro lado, en ese mismo punto tenemos la reacción normal del plano, y además está el peso que se aplica en el centro de masas de la esfera.

Con respecto a la fuerza de rozamiento, no es apropiado escribir una expresión del tipo $F_r = \mu N$ puesto que esa es la máxima fuerza de rozamiento. Sin embargo, como la esfera está rodando, no podemos afirmar que la fuerza sea la máxima (si estuviese deslizando sí que podríamos decirlo)



Las fuerzas externas son, por tanto:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{g},\ \vec{N},\ \vec{F}_r$$

Con los ejes que hemos escogido, descomponemos las fuerzas:

$$M\vec{g} = \begin{cases} Mg\sin\varphi\vec{i} \\ -Mg\cos\varphi\vec{j} \end{cases}$$

$$\vec{N} = N\vec{i}$$

$$\vec{F}_r = -F_r\vec{i}$$

Tenemos por un lado un movimiento de traslación. La aceleración del centro de masas es $\vec{A} = A\vec{i}$. Planteamos dos ecuaciones:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{A} \implies \begin{cases} Mg\sin\varphi - F_r = MA, \\ N - Mg\cos\varphi = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Por el otro lado, con respecto al eje de rotación (centro de masas), sabemos que sólo la fuerza de rozamiento aporta momento.

$$\vec{N}^* = \vec{N}_{\mathrm{F_r}} = RF_r(-\vec{k})$$

El momento de inercia de una esfera maciza rotando sobre un eje que pasa por su centro de masas es: $I^* = (2/5)MR^2$, y la ecuación del movimiento de rotación de los sólidos rígidos nos dice que $\vec{N}^* = I^*\vec{\alpha}$, con lo que, utilizando la ecuación anterior:

$$\left.\begin{array}{c} \vec{N}^* = RF_r(-\vec{k}) \\ \vec{N}^* = I^*\vec{\alpha} \end{array}\right\} \Longrightarrow F_r = \frac{2}{5}MR\alpha \tag{4.6}$$

puesto que $\vec{\alpha} = \alpha(-\vec{k})$.

Tenemos de momento tres incógnitas, la fuerza de rozamiento, la aceleración angular $\vec{\alpha}$ y la aceleración del centro de masas. Pero sólo tenemos dos ecuaciones que nos sean útiles (porque la segunda ecuación de (4.5) no nos aporta información). Una última ecuación la planteamos teniendo en cuenta que la rodadura es sin deslizamiento, por tanto

$$A = \alpha R \tag{4.7}$$

Ahora ya tenemos tres ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) y tres incógnitas.

Resolviendo el sistema se obtiene que $A = (5/7)g\sin\varphi$, $\alpha = (5/7)g\sin\varphi/R$ y $F_r = (2/7)Mg\sin\varphi$.

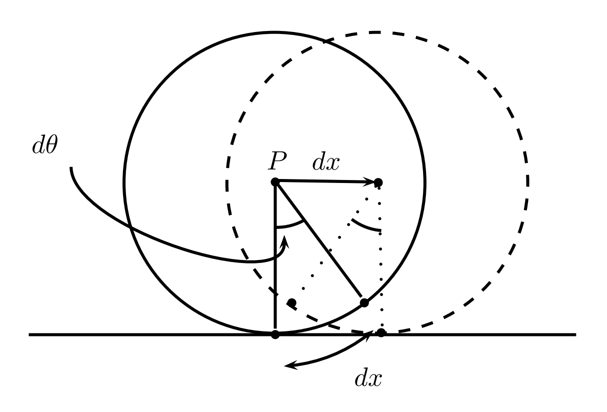
Hemos supuesto que hay rodadura sin deslizamiento, es decir, que la fuerza de rozamiento es menor que la fuerza de rozamiento máxima:

$$\frac{2}{7}Mg\sin\varphi \leq \mu N = \mu Mg\cos\varphi$$

Es decir, habrá rodadura siempre y cuando el coeficiente de rozamiento sea $\mu \geq \frac{2}{7}\tan\varphi$.

Rodadura sin deslizamiento: relación de A y α

Supongamos que tenemos una esfera, disco o cilindro rodando sin deslizar por un plano, tal y como se muestra en la figura.



Si el sólido rígido rota un ángulo $d\theta$, vemos que el punto P avanza una distancia que es la misma que el arco que ha rodado. El arco es $dX = rd\theta$, donde r es el radio (importante! el ángulo en radianes). Entonces:

$$dX = rd\theta$$

Derivando con respecto al tiempo sacamos la velocidad del punto P.

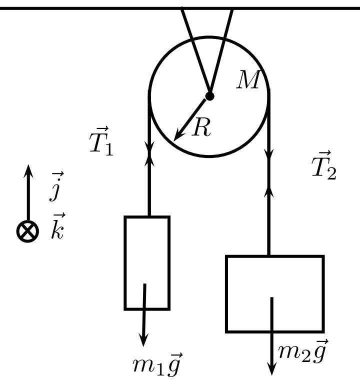
$$\frac{dX}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \implies V = r\omega$$

Si volvemos a derivar, tenemos la aceleración:

$$\frac{d^2X}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} \implies A = r\alpha$$

4.5.3 La máquina de Atwood

La máquina de Atwood consta de dos bloques de masas m_1 y $m_2 < m_1$, unidas por una cuerda a través de un disco de masa M y radio R que hace las veces de polea.



Suponemos que la cuerda, inextensible y sin masa apreciable, no desliza.

Antes de plantear ecuaciones, notar que, debido a la diferencia de masas, las aceleraciones de los bloques 1 y 2 son iguales y de sentido contrario.

En primer lugar, planteamos la 2^a ecuación de Newton para los bloques de masa m_1 y m_2:

$$m_1g - T_1 = m_1a \tag{4.8}$$

$$T_2 - m_2g = m_2a \tag{4.9}$$

Por otro lado, la polea está rotando en torno a su eje, con $\vec{\omega} \parallel \vec{k}$. Sobre la polea actúan varias fuerzas: su propio peso, la fuerza de ligadura que la sostiene, y las tensiones T_1 y T_2. Desde su centro de masas, sólo las dos últimas contribuyen a su momento $\vec{N}^*$.

$$N^* = T_1R - T_2R$$

Por otro lado, el momento de inercia de un disco de masa M y radio R es $I^* = MR^2/2$, y la ecuación del movimiento de los sólidos en rotación es:

$$N^* = I^*\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

Juntando estas dos ecuaciones:

$$(T_1 - T_2)R = \frac{1}{2}MR^2\alpha \tag{4.10}$$

De momento tenemos las incógnitas de las tensiones T_1 y T_2, la aceleración a de los bloques y la aceleración angular α de la polea. Necesitamos una ecuación más.

Supongamos ahora que estamos en un punto del borde del disco. Como la cuerda rueda sin deslizamiento, planteamos la ecuación de rodadura:

$$a = \alpha R \tag{4.11}$$

La aceleración en el borde del disco es el producto del radio por la aceleración angular.

Ahora ya tenemos 4 ecuaciones: las (4.8), (4.9), (4.10) y (4.11). Resolvemos: (4.8) + (4.9) $\rightarrow$

$$(m_1 - m_2)g + (m_1 + m_2)a = T_1 - T_2$$

Con las ecuaciones (4.10) y (4.11) obtenemos la expresión:

$$(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}Ma \implies$$

sustituyendo el la ecuación anterior:

$$(m_1 - m_2)g + (m_1 + m_2)a = \frac{1}{2}Ma \implies$$

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}$$

Es la aceleración con que la masa mayor cae y la masa menor sube. La polea rota con una aceleración angular:

$$\alpha = g\frac{m_1 - m_2}{R(m_1 + m_2 + M/2)}$$

Chapter 5

Termodinámica

5.1 Introducción

El término *termodinámica* procede de las voces griegas “termo” (calor) y “dinamo” (fuerza) y, literalmente hace referencia a los procesos mecánicos inducidos por el calor, aunque el campo de la termodinámica es bastante más amplio. Así, sirve para estudiar el funcionamiento y rendimiento mecánico de máquinas, pero también de sistemas químicos, biológicos, geológicos.

La termodinámica es una ciencia experimental en la que se estudian *sistemas* macroscópicos. Un sistema puede ser cualquier porción del universo, esté o no aislada del entorno. Para estudiar y caracterizar un sistema termodinámico se echa mano de una serie de magnitudes que se evalúan sobre sistemas macroscópicos. De esta manera se dice que las *variables termodinámicas* caracterizan el estado de un sistema. Dicho de otro modo, las variables termodinámicas son *funciones de estado* y que están en equilibrio termodinámico. Las variables termodinámicas solo pueden definirse cuando el sistema se encuentra en *equilibrio termodinámico.* Esto comporta tres equilibrios simultáneos: equilibrio térmico, mecánico y químico.

Los sistemas termodinámicos pueden experimentar cambios (por ejemplo debido a un aporte de calor, o a la realización de un trabajo...). A estos cambios los denominaremos procesos termodinámicos, y pueden ser de muy diversa naturaleza, pero están todos regidos por los *principios de la termodinámica*, algunos de los cuales veremos a lo largo de este capítulo.

5.2 Equilibrio térmico y temperatura

El primer concepto que nos evoca el término termodinámica es el de temperatura. La temperatura es la magnitud física que relacionamos con los conceptos comunes de “caliente” o “frío”.

Decimos que dos sistemas están en equilibrio térmico si se encuentran a la misma temperatura.

Principio Cero de la Termodinámica Dos sistemas en equilibrio térmico con un tercero están en equilibrio térmico entre sí.

Así se puede definir una escala de termperaturas, utilizando un termómetro, es decir, un sistema que posea alguna propiedad que dependa de la temperatura, y que a la vez pueda ser medible. El ejemplo más común de termómetro es el de mercurio. Su dilatación con la temperatura nos permite definir una escala: La longitud de la columna de mercurio varía con la temperatura.

Existen varias escalas, que pueden ser definidas tomando dos puntos fijos a los que se asigna una temperatura:

- Escala Celsius: Se toma el punto (o temperatura) de congelación del agua como 0^o C, y el punto de ebullición del agua como 100^o C. Si disponemos de una columna de mercurio, marcamos la altura que ésta tiene a los 0^o y 100^o C y el espacio entre las dos marcas se divide en 100 intervalos iguales. De esta manera se define la escala. Es la más empleada en situaciones cotidianas.

- Escala Fahrenheit: Los puntos de referencia son distintos. El de fusión del hielo es 32^o F y el de ebullición del agua es 212^o F. Si la temperatura en escala Fahrenheit la escribimos como T_F y la temperatura en escala Celsius como T_C, ambas se relacionan así:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

  Es empleada fundamentalmente en países anglosajones.

- Escala Kelvin: También denominada escala absoluta. Es la empleada en el sistema intenacional. Lord Kelvin estableció que la temperatura límite o cero absoluto es -273.15^o C. A partir de ahí se define la temperatura en Kelvin T_K:

$$T_K = -273.15 + T_C$$

5.3 Leyes de los gases ideales

Las leyes de los denominados gases ideales responden a una serie de observaciones empíricas históricas:

5.3.1 Ley de Boyle/Mariotte

A temperatura constante, y para gases a baja densidad, se encuentra que el producto entre la presión P y el volumen V es:

$$PV = cte$$

Este comportamiento fue observado por Boyle (1662) y por Mariotte (1676) en estudios independientes.

5.3.2 Ley de Gay-Lussac/Charles

A presión constante, y, siempre en condiciones de baja densidad, se encuentra que el cociente entre el volumen ocupado por un gas V y su temperatura T también es constante:

$$\frac{V}{T} = cte$$

Se suele atribuir este descubrimiento a Gay-Lussac (1802) aunque ya lo había estudiado Charles (1787).

5.3.3 Avogadro y el mol

Una vez aceptada la hipótesis atómica, se introduce el concepto de mol. Un mol de cualquier sustancia contiene el mismo número de átomos (o moléculas). Este número es el conocido como número de Avogadro:

$$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ partículas/mol}$$

Un mol de cualquier sustancia contiene siempre N_A átomos (o moléculas) y su masa viene caracterizada por el número másico del núcleo del elemento o compuesto en cuestión.

5.3.4 Ley de Avogadro

Avogadro encontró que a presión y temperatura constantes, el cociente entre el volumen ocupado V y el número de moles n es también constante:

$$\frac{V}{n} = cte$$

5.3.5 Ecuación de Estado

Las anteriores leyes se resumen en la siguente ecuación de estado propuesta por Clapeyron en 1834:

$$PV = nRT$$

donde P es la presión, V el volumen, n el número de moles y T la temperatura. La constante de proporcionalidad R es la constante universal de los gases

$$R = 8,314 \text{ J/mol K}$$

$$R = 0.082 \text{ atm·l/mol·K}$$

5.3.6 Ley de Dalton

Es habitual encontrarse en situaciones donde en un recipiente existe no un gas puro sino una mezcla de varios conviviendo simulatáneamente. Por ejemplo, si se encierra en un cilindro aire procedente de la atmósfera (a la altura del nivel del mar) tendríamos una mezcla de nitrógeno y oxígeno fundamentalmente, además de pequeñas proporciones de otros gases como el dióxido de carbono, etc. Entonces, suponiendo que se dan las condiciones de gas ideal, ¿cómo utilizar la ecuación de los gases ideales? En primer lugar definimos el concepto de presión parcial como aquélla que ejercería cada uno de los gases de la mezcla si éste estuviese solo ocupando el volumen total y a la misma temperatura.

Si tenemos un recipiente de volumen V a temperatura T con NG gases, la presión parcial del 'i'-ésimo de ellos es P_i. Si hay n_i moles del gas 'i'-ésimo, entonces

$$P_i V = n_i RT$$

La presión total P_{tot} es la suma de las presiones parciales,

$$P_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{NG} P_i = \sum_{i=1}^{NG} n_i \frac{RT}{V}$$

La ley que establece que la presión de una mezcla de gases es la suma de las presiones parciales de los componentes de la mezcla se denomina ley de Dalton. Es válida para mezclas de gases a la misma temperatura y que no reaccionan químicamente entre sí.

5.4 Teoría cinética

Consideremos ahora a un gas, que ocupa un volumen V, que consta de N moléculas. Vamos a realizar varias hipótesis:

1. Las moléculas son puntuales, y tienen una velocidad $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.
2. No existe interacción a distancia entre las partículas.
3. Colisionan entre sí elásticamente.
4. No existen direcciones privilegiadas: $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = (1/3)\langle v^2 \rangle$.

5.4.1 Energía cinética

En función de la temperatura la velocidad de las partículas tendrá una distribución u otra. Boltzmann estudió estas distribuciones para demostrar que estadísticamente la velocidad cuadrática media $\langle v^2 \rangle$ se relaciona con la temperatura:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_BT}{m_{\text{mol}}}$$

donde T es la temperatura, m_{mol} la masa de las moleculas y k_B es la constante de Boltzmann y vale $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Entonces, si tenemos n moles de gas, y por lo tanto nN_A partículas, la energía cinética es:

$$E_C = nN_A \frac{1}{2} m_{\text{mol}} \langle v^2 \rangle = nN_A \frac{1}{2} \cancel{m_{\text{mol}}} \frac{3k_BT}{\cancel{m_{\text{mol}}}} = nN_A \frac{3}{2} k_BT$$

Si escribimos $N_A \cdot k_B = R$ tenemos que

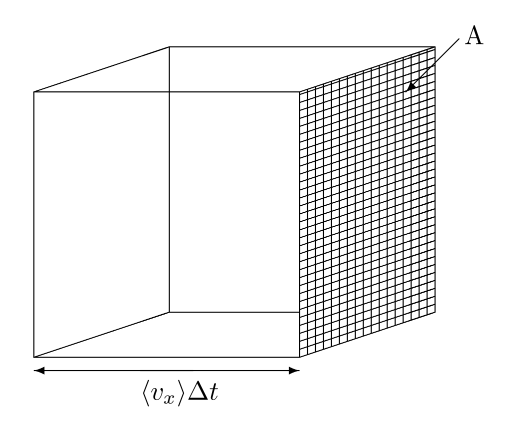
$$E_C = n \cdot 3 \frac{1}{2} RT$$

En su movimiento, las partículas tienen 3 grados de libertad. Cada grado de libertad aporta la misma proporción de energía cinética (porque no hay direcciones privilegiadas). Por tanto, cada grado de libertad contribuye en un factor $(1/2)k_BT$.

5.4.2 Presión

Por otro lado, veamos cómo es la presión en los gases ideales. La presión se define como fuerza dividida por superficie.

Tomemos un pequeño lapso de tiempo Δt. A partir de aquí podemos definir un elemento de volumen como el observado en la figura: un paralelepípedo de sección A y con las aristas perpendiculares a dicha sección miden $v_x \Delta t$, que es la distancia que una partícula del gas con velocidad v_x puede recorrer en ese intervalo de tiempo.



¿Cuál es la presión que el gas ejerce sobre una de las caras de ese cubo? Tomemos por ejemplo el área marcada (A) en la figura. La presión será la componente de la fuerza en la dirección perpendicular a esa superficie (dirección x) dividida precisamente por la superficie:

$$P = \frac{F_x}{A} = \frac{1}{A} \frac{dp_x}{dt} \simeq \frac{1}{A} \frac{\Delta p_x}{\Delta t}$$

donde hemos tenido en cuenta que la fuerza es la derivada con el tiempo del momento lineal, para después aproximar la derivada por la variación con el tiempo, suponiendo que Δt es pequeño. ¿Cómo varía el momento lineal? Si suponemos que cada partícula, de masa m, tiene una velocidad v_x y choca con otra de misma velocidad y sentido contrario, tras la colisión elástica su velocidad pasará a ser $-v_x$. Es decir, su velocidad ha variado en $2v_x$. Y por tanto su momento ha variado $\Delta p_x = 2v_x m$.

Si denominamos N' al número de partículas que en el intervalo de tiempo Δt chocan en A, entonces, el cambio de momento lineal de todas las partículas es

$$\Delta p_x = N' 2 v_x m$$

y por tanto la presión es:

$$P \simeq \frac{1}{A} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{1}{A} \frac{2 m v_x}{\Delta t} N'$$

N es el número de partículas hay en el sistema de volumen V. El elemento de volumen que estamos estudiando tiene un volumen $V' = v_x \Delta t \cdot A$. El número de partículas que hay en nuestro elemento de volumen se obtiene sencillamente

mediante una regla de tres. Pero solo la mitad de éstas partículas tendrán velocidad en la dirección $x > 0$, y por tanto sólo la mitad de esas partículas llegarán a la superficie A (las demás se van en sentido contrario, alejándose). Ese es el número N' que buscamos:

$$N' = \frac{N}{V} A v_x \Delta t \frac{1}{2}$$

Entonces sustituimos este valor en la fórmula de la presión:

$$P = \frac{1}{\cancel{A}} \frac{\cancel{2} m v_x}{\cancel{\Delta t}} \frac{N}{V} \cancel{A} v_x \cancel{\Delta t} \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{N}{V} m v_x^2$$

Como estamos estudiando un número muy elevado de partículas, es apropiado trabajar con cantidades promediadas: En lugar de v_x^2 trabajaremos con $\langle v_x^2 \rangle$.

Según la hipótesis de isotropía (ausencia de direcciones privilegiadas) $\langle v_x^2 \rangle = (1/3)\langle v^2 \rangle$. Y, según hemos visto en el estudio de la energía cinética de los gases, el promedio de la velocidad cuadrática es

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3 k_B T}{m}$$

con lo cual, la presión la podemos reescribir como sigue:

$$P = \frac{N}{V} \cancel{m} \frac{1}{\cancel{3}} \frac{\cancel{3} k_B T}{\cancel{m}} = \frac{N}{V} k_B T$$

Recordar que el número total de partículas es igual al número de Avogadro N_A multiplicado por el ńumero de moles n, es decir,

$$P = \frac{N_A n}{V} k_B T$$

que es la misma ecuación que la de los gases ideales si definimos $R = N_A k_B \implies$

$$PV = n N_A \cdot k_B \cdot T = n \cdot R \cdot T$$

Es decir, mediante el análisis estadístico, la teoría cinética (que usa las hipótesis detalladas al inicio de este punto) nos permite desarrollar una ecuación equivalente a la de los gases ideales.

5.4.3 Energía Interna

En el modelo que obtenemos mediante el estudio cinético de los gases, se está suponiendo que la energía que tiene nuestro sistema es la energía cinética de las partículas que lo componen. La velocidad de las partículas depende solamente de la temperatura. Por tanto, la energía interna se puede escribir como función de T.

5.5 Energía Interna, Calor y Trabajo: Primer Principio de la Termodinámica

Antes hemos visto que la energía de un gas ideal está asociada a su temperatura. Se trata de la energía interna y la denotamos con la letra U mayúscula.

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

Si el sistema está aislado, su energía interna permanecerá constante. Pero si no lo está pueden producirse cambios en la misma.

5.5.1 Calor

Entre dos sistemas termodinámicos a distinta temperatura y conectados se produce una transferencia de energía. En concreto hay una transferencia de energía procedente del sistema que se encuentra a mayor temperatura hacia el de temperatura más baja. La transferencia existe hasta que ambos sistemas se encuentran en equilibrio termodinámico entre sí. Denominamos calor Q al flujo de energía como consecuencia de una diferencia de temperaturas.

Al tratarse de una magnitud de energía se mide en Julios. Otra unidad empleada es la caloría:

$$1 \text{ cal.} = 4.184 \text{ J}$$

La caloría es la cantidad de calor que es necesario aportar a un gramo de agua para incrementar su temperatura en un grado Celsius o Kelvin.

5.5.2 Cambios de temperatura

De manera similar a la definición de caloría, se puede definir la capacidad calorífica C de cualquier sistema como la cantidad de calor que es necesario aportar para incrementar su temperatura en un grado. Del mismo modo, la cantidad de calor para provocar un incremento de la temperatura del sistema en ΔT sería:

$$Q = C\Delta T$$

en unidades del SI C se mide en J/K. En ocasiones se emplean candidades por unidad de masa o por mol. En ese caso se habla de capacidad calorífica específica y se utiliza una letra minúscula c.

Cabe destacar que el calor Q es una magnitud escalar que lleva un signo asociado a la ganancia o pérdida de energía interna. El sistema cuya temperatura disminuye está cediendo calor, y por lo tanto $Q < 0$, mientras que el sistema a menor temperatura está recibiendo calor, es decir, $Q > 0$.

La expresión anterior para el calor está tomada considerando que C (o c) no cambia con la temperatura, es constante. En muchos materiales esto se cumple para amplios rangos de temperaturas, pero no es una ley general. Si C (o c) cambia con T, entonces lo adecuado es escribir el flujo de calor para un cambio infinietesimal de temperatura dT: es decir, el sistema pasa de una temperatura T a $T + dT$. El calor recibido es:

$$dQ = CdT = mcdT$$

donde m es la masa.

5.5.3 Cambios de Fase

Los cambios de fase son procesos termodinámicos en los que no hay cambios de temperatura pero sí un aporte (o pérdida) de energía en forma de calor. Un bloque de hielo a 0^o C en una habitación a 20^o C está recibiendo un aporte de calor que está haciendo incrementar su energía interna. Si el aporte energía se mantiene se producirá una transición de fase: el hielo se funde. Otros ejemplos son la solidificación, la vaporización, la condensación... . Durante las transiciones de fase la temperatura del sistema no varía porque toda la energía recibida por el sistema es empleada en, por ejemplo, romper los enlaces del estado sólido del hielo. El calor que es necesario para provocar el cambio de fase de fusión de un bloque de masa m es:

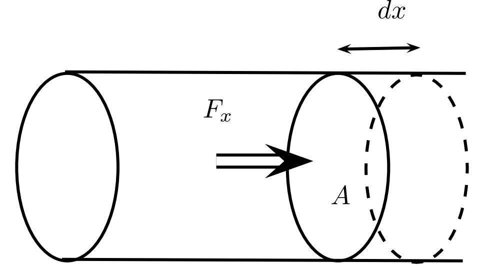
$$Q_f = mL_f$$

donde L_f es el denominado *calor latente de fusión.* El calor latente por mol se escribe l_f, y entonces, para fundir n moles hace falta $Q_f = nl_f$. Análogamente sucede con los calores latentes de vaporización, condensación... .

5.5.4 Trabajo

Los sistemas termodinámicos también pueden cambiar su energía interna realizando (o absorbiendo) trabajo. Supongamos que tenemos un sistema termodinámico encerrado en un cilindro con un pistón de área A.

Si el gas realiza una fuerza sobre el exterior que provoca un desplazamiento dx del pistón, entonces está realizando trabajo.



Por la definición de trabajo

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx = \int PAdx = \int PdV$$

El trabajo es la integral de la presión en volumen. El elemento diferencial de trabajo es:

$$dW = PdV$$

Cuando el sistema realiza un trabajo hacia el exterior, el criterio que empleamos es el de $W > 0$. Si, en cambio, el sistema recibe trabajo desde el entorno, entonces decimos que éste es negativo $W < 0$.

Nota: Existe otro criterio de signos, según el cual el trabajo efectuado sobre el sistema es positivo y negativo el trabajo que el sistema realiza sobre el exterior. En ese caso el elemento diferencial de trabajo es $dW = -PdV$. Sin embargo nosotros emplearemos el otro criterio de signos, enunciado anteriormente.

5.5.5 Primer Principio de la Termodinámica

La variación de la energía interna de un sistema (ΔU) es igual al calor Q transferido mas el trabajo W realizado por (o sobre) el sistema, es decir:

$$\boxed{\Delta U = Q - W}$$

En termodinámica se estudian los procesos llamados “cuasiestáticos”: procesos en los cuales el sistema evoluciona atravesando siempre estados de equilibrio. Así, todos los puntos del sistema tienen la misma presión, temperatura... .

Así, por ejemplo a la hora de calcular el trabajo en un proceso de expansión, el elemento diferencial de trabajo lo calculamos considerando que a cada pequeña variación de volumen dV, el sistema alcanza el equilibrio, y después experimenta la siguente pequeña variación dV, etc... hasta alcanzar el volumen final.

En procesos cuasiestáticos, suficientement lentos de forma que nunca se abandona el equilibrio termodinámico, resulta conveniente la formulación diferencial:

$$dU = dQ - dW$$

5.5.6 Experimento de Joule

En 1844 Joule propuso un experimento esquematizado en la figura: Dentro de un recipiente que no permite el flujo de calor (un calorímetro) se ubican dos recipientes A y B conectados mediante una válvula R, además de un termómetro para medir cambios de temperatura. Si A contiene un gas ideal y B está vacío, entonces al abrir la válvula R el gas ideal se expandirá para ocupar todo el volumen.

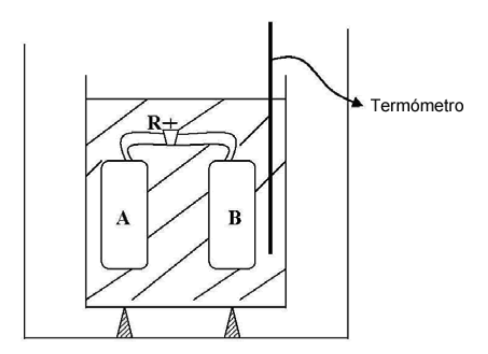


Figure 5.1: Esquema del experimento realizado por Joule en 1844

El sistema está aislado adiabáticamente, es decir, no permite el flujo de calor. Por otra parte, el sistema no está realizando ningún trabajo hacia el exterior ni tampoco lo está recibiendo. Por tanto $Q = W = 0$. Entonces, según el primer principio $\Delta U = 0$.

Joule encontró que en este proceso en el que cambian la presión y el volumen del gas ideal, su temperatura permanece constante. Por lo tanto dedujo que *la energía interna de un gas ideal solo depende la temperatura*, tal y como habíamos predicho anteriormente.

5.6 Procesos Termodinámicos

Es costumbre representar tanto los estados termodinámicos como los procesos experimentados por el sistema según diagramas PV (Presión-Volumen). Estos esquemas facilitan el análisis de algunos procesos fundamentales que enumeramos a continuación:

1. *Isobaros*: Presión constante.
2. *Isócoros*: Volumen constante.
3. *Isotermos*: Temperatura constante.
4. *Adiabáticos*: Sin flujo de calor, $Q = 0$:

A continuación comentamos brevemente algunas características de estos procesos:

5.6.1 Procesos Isócoros

Los procesos isócoros o isocoros son aquellos en los que el volumen permanece constante.

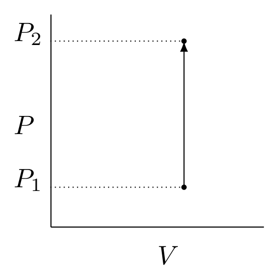


Figure 5.2: Diagrama P-V: Ejemplo de proceso isocoro

En los procesos isocoros, al no haber variación de volumen, el trabajo es nulo. Por tanto, toda variación de la energía interna del sistema será consecuencia del flujo de calor

$$W = 0 \implies \Delta U = Q$$

La *capacidad calorífica* de una sustancia, en general, se define como la variación de calor bajo variaciones de temperatura

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

y puede depender tanto de la naturaleza del sistema como de las condiciones P, T, V).

Cuando trabajamos a volumen constante se define C_v, la *capacidad calorífica a volumen constante*.

Para los gases ideales la energía interna solo depende de la temperatura. En estos casos se encuentra que el diferencial de energía interna es directamente proporcional al diferencial de temperatura:

$$dU = dQ = C_v dT$$

donde C_v es la denominada *capacidad calorífica a volumen constante*. A veces es más cómodo utilizar la capacidad específica $c_v = C_v/n$. Depende de cada sustancia y, en principio, puede variar también con la temperatura y la presión. No obstante, en multitud de procesos es aproximadamente constante, con lo que se puede integrar de manera sencilla la expresión anterior:

$$\Delta U = Q = C_v \Delta T = n c_v \Delta T$$

Por otra parte, si trabajamos con un gas ideal a temperatura inicial T_1, entonces la variación de temperatura cuando se pasa de una presión P_1 a una presión P_2 es:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{P_2 V}{nR} - \frac{P_1 V}{nR} = (P_2 - P_1)\frac{V}{nR}$$

5.6.2 Procesos Isobaros

Al ser procesos en los que la presión permanece constante, el trabajo total se calcula de forma inmediata. En un proceso isobaro en el que el volumen inicial sea V_1 y el final V_2, a presión P, el trabajo es:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P \int_{V_1}^{V_2} dV = P(V_2 - V_1) = P \Delta V$$

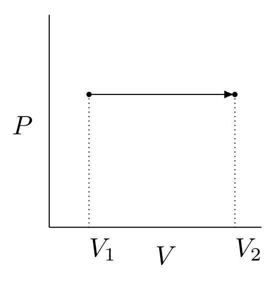


Figure 5.3: Diagrama P-V: Ejemplo de proceso isobaro

Si el proceso isobaro está protagonizado por un gas ideal, entonces también podemos tener en cuenta la ecuación de los gases ideales para calcular cual va a ser la variación de temperatura del sistema:

$$PV = nRT \implies T = \frac{PV}{nR}$$

Si el sistema está cerrado (no entra ni sale materia y n es constante), y la temperatura inicial es T_1, entonces la variación de temperatura es:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{PV_2}{nR} - \frac{PV_1}{nR} = (V_2 - V_1)\frac{P}{nR}$$

Cuando se trabaja a presión constante, se define la *capacidad calorífica a presión constante* o C_p. También es habitual trabajar con la *capacidad calorífica específica a presión constante*, c_p minúscula que es la anterior dividida por el número de moles: $C_p = n c_p$.

Entonces los incrementos diferenciales de calor son:

$$dQ = C_p dT = nc_p dT$$

si consideramos que la capacidad calorífica a presión constante no varía con la temperatura, entonces:

$$Q = C_p \Delta T = nc_p \Delta T$$

Relación entre C_v y C_p para gases ideales

En una transformación a volumen constante:

$$dU = dQ = nc_v dT$$

En una transformación a presión constante:

$$dU = dQ - dW = nc_p dT - PdV$$

La variación de energía interna no depende del tipo de transformación. La energía interna es propiedad del sistema (y no del proceso seguido), por lo tanto la variación de energía interna solo depende del estado inicial y final. Entonces, se pueden igualar las dos ecuaciones anteriores:

$$nc_v dT = nc_p dT - PdV$$

En un gas ideal, por la ecuación de estado, sabemos que a presión constante

$$PV = nRT \implies PdV = nRdT$$

sustituimos en la expresión previa:

$$nc_v dT = nc_p dT - nRdT \implies nc_v = nc_p - nR$$

Es decir, en los gases ideales se cumple que:

$$nc_v = nc_p - nR \implies C_v = C_p - nR$$

Además, en gases monoatómicos y diatómicos se pueden calcular los valores teóricos de las constantes.

- Gases monoatómicos: $C_v = \frac{3}{2}nR, \quad C_p = \frac{5}{2}nR.$
- Gases diatómicos: $C_v = \frac{5}{2}nR, \quad C_p = \frac{7}{2}nR.$

Por otra parte se define el coeficiente adiabático $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

5.6.3 Procesos Isotermos

En los procesos isotermos, la temperatura es constante. Que la temperatura sea constante no implica la ausencia de transferencia de calor.

Si el gas es ideal, entonces $PV =$ constante, por la ecuación de los gases ideales.

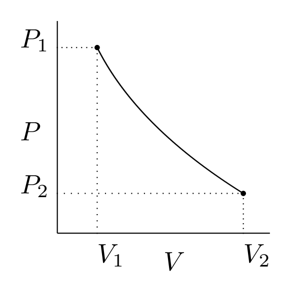


Figure 5.4: Diagrama P-V: Ejemplo de proceso isotermo

La energía interna de los gases ideales depende solo de su temperatura. Por tanto, al no haber variación térmica $\implies \Delta U = 0$. Por tanto,

$$Q = W$$

Como bien es sabido, $PV = k$ (cte), es decir,

$$\left.\begin{array}{c} PV = nRT \implies P = \frac{nRT}{V} \\ W = \int_{V_1}^{V_2} PdV \end{array}\right\} \implies W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \left[\ln V\right]_{V_1}^{V_2}$$

$$W = nRT(\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

5.6.4 Procesos Adiabáticos

En los procesos adiabáticos no existe transferencia de calor. Por tanto toda variación de energía interna será consecuencia de la realización de un trabajo.

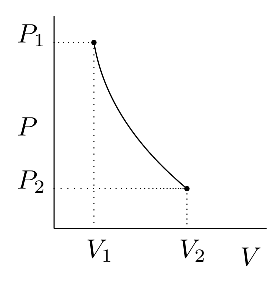


Figure 5.5: Diagrama P-V: Ejemplo de proceso adiabático

Análogamente al caso anterior: la no transferencia de calor no implica conservación de la temperatura.

Sabemos que $dQ = 0$ y que $Q = 0$.

$$dU = -pdV$$

Si el proceso adiabático lo experiment un gas ideal, como vimos anteriormente, siempre podemos escribir la variación de energía interna en función de c_v. Por otra parte, de la ecuación de los gases ideales, podemos despejar la presión P.

$$\left.\begin{array}{r} dU = -PdV \\ dU = nc_v dT \\ PV = nRT \implies P = \frac{nRT}{V} \end{array}\right\} \implies nc_v dT = -nRT\frac{dV}{V} \implies \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_v}\frac{dV}{V}$$

Esta expresión se puede integrar. El resultado nos da sendos logaritmos a cada lado del igual:

$$\ln T = -\frac{R}{c_v}\ln V + cte \implies$$

$$\ln T + \ln V^{\frac{R}{c_v}} = cte \implies$$

$$TV^{\frac{R}{c_v}} = cte$$

Además, por la ecuación de los gases, $T = \frac{PV}{nR}$, y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$PV^{\frac{R}{c_v}+1} = cte$$

Como se vio anteriormente, $c_p = c_v + R \rightarrow$

$$\frac{R}{c_v} + 1 = \frac{c_p - c_v}{c_v} + 1 = \frac{c_p}{c_v} = \gamma$$

donde γ es el coeficiente adiabático. Por tanto, podemos escribir que en los procesos adiabáticos con gases ideales se cumple que:

$$PV^\gamma = cte \quad \text{(y, además)}\ TV^{\gamma-1} = cte$$

La primera de estas expresiones nos servirá para calcular el trabajo realizado por un gas ideal en procesos adiabáticos. Si el volumen que ocupa inicialmente el sistema es V_1 y al final V_2:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{cte}{V^\gamma}dV = \frac{cte}{-\gamma+1}\left(V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}\right)$$

Llegados a este punto, recordemos que, si la presión y temperatura iniciales son P_1 y T_1 respectivamente, y las finales son P_2 y T_2, entonces:

$$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma = cte$$

$$P_1V_1^\gamma \cdot V_1^{-\gamma+1} = cte \cdot V_1^{-\gamma+1}$$

$$P_1V_1 = cte \cdot V_1^{-\gamma+1}$$

$$P_1V_1 = nRT_1 \implies nRT_1 = cte \cdot V_1^{-\gamma+1}$$

Y análogamente con P_2V_2. Entonces el trabajo queda:

$$W = \frac{cte}{-\gamma+1}\left(V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}\right) = \frac{1}{-\gamma+1}\left(P_2V_2 - P_1V_1\right) = \frac{nR}{-\gamma+1}\left(T_2 - T_1\right)$$

Finalmente, por la definición de γ y la relación entre las capacidades caloríficas específicas, obtenemos:

$$W = -nc_v(T_2 - T_1)$$

5.7 Máquinas Térmicas y Segundo Principio de la Termodinámica

En termodinámica se pueden dar dos tipos de procesos si nos atenemos a su reversibilidad: Los procesos irreversibles y los reversibles. Los primeros son procesos en los que, una vez alcanzado el estado final, nunca se podrá regresar (de manera natural) al estado inicial. Por contra, en los reversibles, el estado inicial se puede alcanzar nuevamente. En los procesos irreversibles se observa que *ha aumentado el desorden*. La magnitud termodinámica que sirve de medida cuantitativa del desorden de un sistema es la *entropía* (S), de la que nos ocuparemos más adelante.

5.7.1 Procesos espontáneos

Hasta ahora no nos hemos ocupado de si un posible proceso termodinámico es espontáneo (es decir, se produce de manera natural) o no. Nuestra experiencia nos sirve muchas veces para considerar si un proceso se puede dar o no de manera espontánea. Por ejemplo sabemos que una rueda girando, puede dejar de hacerlo por efecto del rozamiento tras un tiempo, aumentando así su temperatura (energía cinética$\rightarrow$ Calor), pero el proceso opuesto no sucederá: Nunca se enfriará para producir energía cinética, empezando a girar espontáneamente desde el reposo. El proceso anterior era irreversible.

Análogamente sucede con la expansión libre de un gas (ver experimento de Joule). Si un gas está encerrado en una cápsula, comunicada con una válvula cerrada con otro compartimento vacío, y la válvula se abre para permitir el paso del gas, entonces éste se expandirá hasta ocupar todo el volumen disponible, y lo hará de forma espontánea. Además es un proceso irreversible: El proceso opuesto nunca sucederá de manera espontánea.

A la hora de construir máquinas térmicas, que es lo que a un ingeniero le interesa de la termodinámica, han de tenerse en cuenta dos cosas:

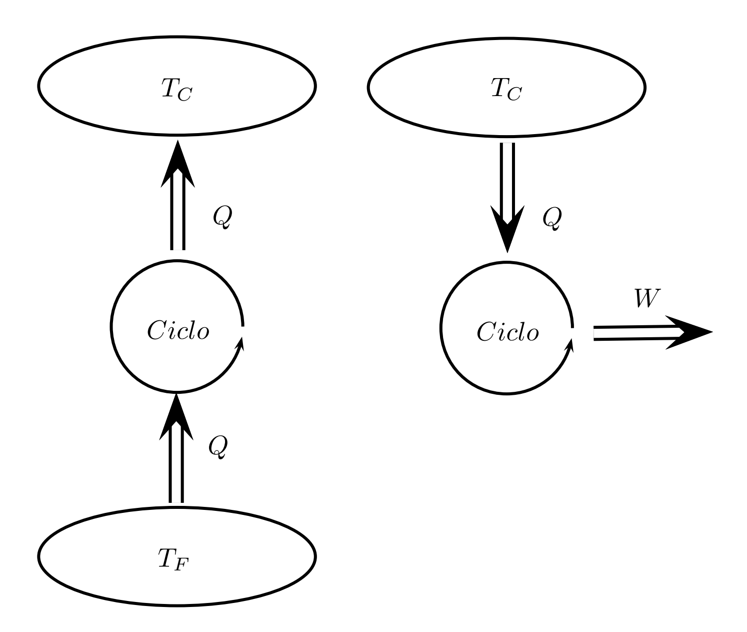
- De forma espontánea nunca puede existir un proceso que consista solo en flujo de calor desde un foco frío a uno caliente.
- Tampoco sucederá un proceso que consista solo en conversión de calor en trabajo.

5.7.2 Máquinas Térmicas

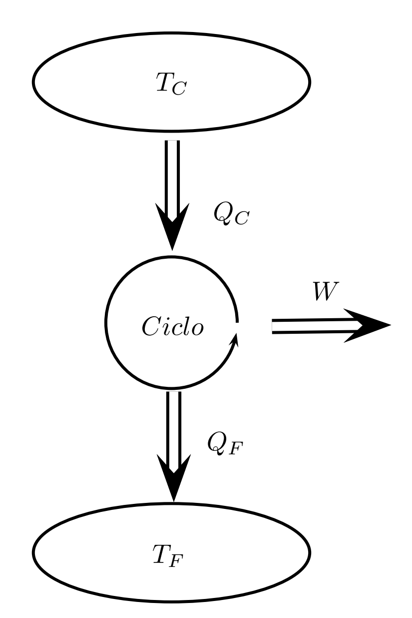
Una máquina térmica es un dispositivo que funciona cíclicamente, con el propósito de convertir la máxima cantidad posible de calor en trabajo. En el desarrollo y estudio de máquinas térmicas se observó que no todos los procesos compatibles con el Primer Principio de la termodinámica son realizables, lo cual dio origen al Segundo Principio, que en definitiva es lo que limita el rendimiento de una máquina.

El Segundo Principio de la Termodinámica, tal y como lo enunció Lord Kelvin: *Es imposible que una máquina térmica funcione cíclicamente sin producir otro efecto que extraer calor de un solo foco realizando una cantidad de trabajo equivalente.*

A continuación se muestran dos esquemas de máquinas térmicas cuyo funcionamiento es imposible.



Como consecuencia del enunciado de Kelvin, sabemos que un ciclo sí que puede absorber calor de un foco (caliente) para realizar un trabajo. Pero no toda la energía absorbida se convertirá en trabajo. Las máquinas térmicas ceden parte del calor absorbido a un foco a baja temperatura, y el resto es lo que se convierte en trabajo. Esquemáticamente sería así:



5.7.3 Rendimiento en máquinas térmicas

El rendimiento ε de una máquina térmica a la que aportamos energía en forma de calor Q_C, procedente de un foco caliente, para, cediendo calor Q_F a un foco frío, obtener un trabajo W_{neto} aprovechable, se define:

$$\varepsilon = \frac{W_{\text{neto}}}{Q_C}$$

Es decir, la energía que obtenemos dividida por la que invertimos.

En una máquina térmica que está funcionando cíclicamente, tras completar un ciclo se regresa a la situación inicial (de P, V, T, y también de energía interna U), con lo que $\Delta U_{\text{ciclo}} = 0$. Por el primer principio:

$$\Delta U = 0 = Q - W \implies Q = W$$

Observar que el balance de calor es el recibido (positivo) mas el cedido por el sistema (negativo):

$$W = Q = Q_C + Q_F = |Q_C| - |Q_F|$$

Entonces, el rendimiento queda:

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|}$$

5.7.4 El ciclo de Carnot

El de Carnot es un ciclo reversible que realiza un gas ideal. Para regresar al estado inicial el gas atraviesa dos procesos isotermos y dos adiabáticos. El proceso se puede representar en un diagrama p-V como el de la figura.

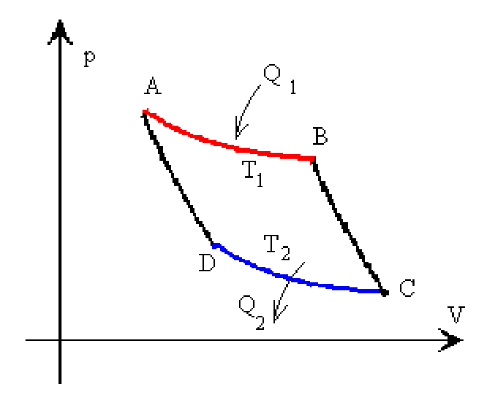


Figure 5.6: Esquema del ciclo de Carnot

El objetivo del ciclo de Carnot es la realización de trabajo hacia el exterior, mediante el aporte de energía a un ciclo. Parte de la energía que se aporta al ciclo en forma de calor absorbido procedente de un foco caliente, se transforma en trabajo que es aprovechable, mientras que el resto se convierte en calor que se cede a otro foco, éste de baja temperatura.

Teorema de Carnot: Ninguna máquina térmica que funcione cíclicamente entre dos focos térmicos puede terner un rendimiento mayor que la máquina de Carnot. La máquina de Carnot sigue un ciclo, llamado ciclo de Carnot, que consta de procesos de expansión y posterior compresión siguendo los siguientes pasos:

1. Expansión isoterma y absorción de calor de un foco caliente.
2. Expansión adiabática hasta alcanzar una temperatura inferior.
3. Compresión isoterma y cesión de calor a un foco frío.
4. Compresión adiabática para recuperar el estado inicial.

Ahora que ya conocemos cómo es el trabajo realizado (o recibido) y el calor absorbido (o cedido) por un gas ideal en procesos isotermos y adiabáticos, podemos estudiar uno a uno todos los pasos que se llevan a cabo en un ciclo de Carnot. Denominamos T_C a la temperatura del foco caliente y T_F a la del foco frío.

Paso 1: Recordemos que en procesos isotermos, a temperatura T_C, y pasando de un volumen inicial V_A a uno final V_B:

$$Q_1 = W_1 = nRT_C \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Por tanto, en primero proceso (entre los puntos A y B del diagrama p-V), el sistema absorbe calor ($Q > 0$) procedente del foco caliente y realiza trabajo ($W = Q$, $W > 0$) porque es una expansión, el volumen aumenta durante el proceso ($V_B > V_A$).

Paso 2: El siguiente paso es la expansión adiabática, con un enfriamiento al pasar de T_C a $T_F < T_C$. En procesos adiabáticos, $Q = 0$, mientras que el trabajo es:

$$W_2 = -nc_v(T_F - T_C)$$

El trabajo es positivo, realizado por el sistema. Una expresión que después nos será útil, a la hora de calcular el rendimiento del ciclo, es la siguiente: En procesos adiabáticos, $TV^{\gamma-1} = cte$. Entonces, durante este proceso adiabático, en el que se pasa de T_C a T_F en cuanto a temperaturas, y de V_B a V_D en volúmenes, se tiene que:

$$T_C V_B^{\gamma-1} = T_F V_C^{\gamma-1}$$

Paso 3: El ciclo continua con una compresión isoterma, proceso que tiene lugar a baja temperatura T_F, pasando de un volumen inicial V_C a uno final V_D. Entonces, el trabajo y el calor son negativos:

$$Q_3 = W_3 = nRT_F \ln \frac{V_D}{V_C}$$

porque $V_C > V_D$ y por tanto el logaritmo del cociente es menor que cero.
El calor es negativo, el sistema está caliente y cede calor a un foco frío. El trabajo es negativo, el sistema recibe trabajo.

Paso 4: Para terminar el ciclo se realiza una compresión adiabática con calentamiento, pasando de una temperatura T_F a $T_C > T_F$. Terminado este proceso el ciclo queda completado, regresa al punto A del diagrama p-V. Al ser un proceso adiabático, no hay transferencia de calor. El trabajo es:

$$W_4 = -nc_v(T_C - T_F)$$

Es una cantidad negativa, con lo que desde el entorno se está realizando un trabajo sobre el sistema. De manera análoga a la anterior adiabática, tenemos la relación entre volúmenes y temperaturas:

$$T_C V_A^{\gamma-1} = T_F V_D^{\gamma-1}$$

Rendimiento del Ciclo de Carnot El rendimiento del ciclo es el trabajo total dividido por el calor que el sistema ha absorbido. El trabajo total es:

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

Obsérvese que el trabajo en las dos fases adiabáticas es igual pero de signo opuesto, con lo que $W_2 + W_4 = 0 \implies W_T = W_1 + W_3$.

Por otra parte el calor que el sistema absorbe es Q_1, que ya calculamos en el paso primero.

Pero además hemos visto que se puede calcular el rendimiento utilizando otra expresión:

$$\varepsilon = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|}$$

es decir, la unidad menos el cociente entre los valores absolutos del calor cedido al foco frío y el calor absorbido del foco caliente. En nuestro ciclo, el calor cedido el foco frío es $Q_F = Q_3$, mientras que el absorbido es $Q_C = Q_1$.

$$\left.\begin{array}{r} |Q_F| = |Q_3| = nRT_F \left|\ln \frac{V_D}{V_C}\right| = nRT_F \ln \frac{V_C}{V_D} \\ |Q_C| = Q_1 = nRT_C \ln \frac{V_B}{V_A} \end{array}\right\} \implies$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_F \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_C \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

Ahora bien, como se vió en el estudio de procesos adiabáticos para gases ideales, $TV^{\gamma-1}$, con lo que se dedujeron dos expresiones para los procesos 2 y 4:

$$\left.\begin{array}{l} T_C V_B^{\gamma-1} = T_F V_C^{\gamma-1} \\ T_C V_A^{\gamma-1} = T_F V_D^{\gamma-1} \end{array}\right\} \implies \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \implies \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Es decir, el rendimiento del ciclo de Carnot es:

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad \text{T en K}$$

Con lo cual, a mayor relación de temperaturas de los focos T_C/T_F, mayor será el rendimiento teórico de un ciclo de Carnot, pero siempre sin llegar al límite ideal de la unidad (el rendimiento nunca podrá ser uno, siempre es menor: $\varepsilon < 1$).